

Table des matières

1	Propositions et connecteurs logiques	2
1.1	Propositions	2
1.2	Les connecteurs logiques	3
	Lois de De Morgan	3
2	Les quantificateurs	4
2.1	Fonction propositionnelle	4
2.2	Quantificateurs et négation	4
3	Lois logiques et méthodes de raisonnement	5
3.1	Raisonnement par déduction	6
3.2	Raisonnement par contraposée	7
3.3	Raisonnement par équivalence	7
3.4	Raisonnement par disjonction des cas	8
3.5	Raisonnement par l'absurde	8
3.6	Raisonnement par contre-exemple	9
3.7	Raisonnement par récurrence	10

1 Propositions et connecteurs logiques

1.1 Propositions

Définition

- Tout énoncé mathématique qui a un sens et qui est soit vrai, soit faux, est une **proposition** (ou **assertion**). Une proposition est notée généralement $p, q, r, \dots$
- On désigne par 1 ou V la valeur de vérité d'une proposition vraie, et par 0 ou F celle d'une proposition fausse.
- Une proposition est soit vraie, soit fausse, et ne peut être à la fois vraie et fausse.
- Une **table de vérité** est un tableau qui donne la valeur de vérité d'une proposition p construite à partir d'autres propositions $q, r, \dots$, en fonction des valeurs de vérité de ces dernières.

Exemple

Pour chacune des phrases suivantes :

- 1 Dire si c'est une proposition. Justifier.
- 2 Si c'est une proposition, donner sa valeur de vérité.

- | | |
|--|--|
| (i) $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 7.$ | (ii) Quelle est la solution de $x^2 = 4$? |
| (iii) $\sqrt{2} + \sqrt{6} \leq \sqrt{8}.$ | (iv) Ferme la porte ! |
| (v) $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$ | (vi) $\sqrt{3} - \sqrt{2} = 1.$ |

Application

On considère les propositions suivantes :

- $p : \sqrt{2} \in \mathbb{N}.$
- $q : 7$ est un nombre premier.
- $r : 114\,516$ est un multiple de 3.

- 1 Donner la valeur de vérité de p, q et r .
- 2 Construire la table de vérité associée au triplet (p, q, r) . Combien de combinaisons obtient-on ?

1.2 Les connecteurs logiques

Propriété

Soient p et q deux propositions. On définit cinq connecteurs logiques :

- **Négation** : la proposition « non p », notée $\bar{p}$ (ou $\neg p$), est vraie si p est fausse, et fausse si p est vraie.
- **Conjonction** : la proposition « p et q », notée $p \wedge q$, est vraie si p et q sont *toutes les deux* vraies, et fausse sinon.
- **Disjonction** : la proposition « p ou q », notée $p \vee q$, est vraie si *au moins* l'une des deux propositions est vraie, et fausse sinon.
- **Implication** : la proposition « $p \Rightarrow q$ », qui se lit « p implique q » ou « si p alors q », n'est fausse *que* lorsque p est vraie et q est fausse. La proposition $q \Rightarrow p$ s'appelle l'**implication réciproque** de $p \Rightarrow q$.
- **Équivalence** : la proposition « $p \Leftrightarrow q$ », qui se lit « p équivaut à q » ou « p si et seulement si q », est vraie lorsque p et q ont la même valeur de vérité (toutes deux vraies, ou toutes deux fausses).

Tables de vérité.

p	q	$\bar{p}$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

Exemple

Donner la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes.

- (i) 36 est pair *et* multiple de 3.
- (ii) 69 est impair *ou* multiple de 3.
- (iii) $\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \pi^2 < 10$.
- (iv) $\sqrt{100} = 10 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 15 = 0$ admet 5 comme unique solution.
- (v) 0 est impair *ou* $\sqrt{25 + 16} = 5 + 4$.
- (vi) $5 + 5 = 11 \Leftrightarrow 3 < 2$.

Application

- 1 Soient p et q deux propositions. À l'aide d'une table de vérité, montrer que :

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{p} \vee q).$$

- 2 En déduire la valeur de vérité de la proposition :

$$(\sqrt{2} \in \mathbb{Z}) \Rightarrow (\sqrt{2} > 1).$$

Propriété

Soient p et q deux propositions.

- $\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow (\bar{p} \vee \bar{q})$.
- $\overline{p \vee q} \Leftrightarrow (\bar{p} \wedge \bar{q})$.
- $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$.
- $(p \wedge \bar{p})$ est toujours *fausse*; $(p \vee \bar{p})$ est toujours *vraie*.

Lois de De Morgan

Exercice à la maison

- 1 Démontrer la première loi de De Morgan à l'aide d'une table de vérité.
- 2 Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $m, n \in \mathbb{N}$. Donner la négation de chacune des propositions :
 - $u : \ll a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab \text{ et } (a + b)^2 - 2ab = \frac{(a + b)^2 + (a - b)^2}{2} \gg$.
 - $v : \ll mn = m + n \text{ ou } mn > m + n \gg$.

2 Les quantificateurs

2.1 Fonction propositionnelle

Définition

On appelle **fonction propositionnelle** sur un ensemble E tout énoncé mathématique contenant une ou plusieurs variables appartenant à E et qui devient une proposition à chaque fois qu'on remplace la (ou les) variable(s) par un (ou des) élément(s) de E . On la note généralement $A(x)$, $A(x, y)$, ...

Exemple

On considère les fonctions propositionnelles suivantes :

- $A(x) : x^2 \geq x$ où $x \in \mathbb{R}$;
- $B(n) : n^2 + n + 1$ est premier, où $n \in \mathbb{N}$;
- $C(x, y) : x + y = xy$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- 1 Donner la valeur de vérité de $A(2)$ et de $A\left(\frac{1}{2}\right)$.
- 2 Donner la valeur de vérité de $B(0)$, $B(1)$, $B(4)$.
- 3 Trouver un couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $C(x, y)$ soit vraie, et un couple tel qu'elle soit fausse.

Application

Soit $A(x) : \frac{x-1}{2} = \frac{x+1}{3}$ où $x \in \mathbb{R}$.

- 1 Existe-t-il une valeur de x pour laquelle $A(x)$ est vraie ? Si oui, la déterminer.
- 2 Combien de telles valeurs existe-t-il ?

2.2 Quantificateurs et négation

Soit $A(x)$ une fonction propositionnelle définie sur un ensemble E . On pose : $A = \{x \in E / A(x) \text{ est vraie}\}$.

Propriété

- **Quantificateur universel.** Si $A = E$, on dit que tous les éléments de E vérifient $A(x)$ et l'on écrit :

$$(\forall x \in E), A(x).$$

Le symbole $\forall$ se lit « pour tout » ou « quel que soit ».

- **Quantificateur existentiel.** Si $A \neq \emptyset$, on dit qu'il existe au moins un élément de E vérifiant $A(x)$ et l'on écrit :

$$(\exists x \in E), A(x).$$

Le symbole $\exists$ se lit « il existe (au moins) ». Le symbole $\exists!$ se lit « il existe un unique ».

- **Négation.** On a les deux règles fondamentales suivantes :

$$\overline{(\forall x \in E, A(x))} \Leftrightarrow (\exists x \in E, \overline{A(x)}) \quad \text{et} \quad \overline{(\exists x \in E, A(x))} \Leftrightarrow (\forall x \in E, \overline{A(x)}).$$

- **Permutation.** On peut permuter deux quantificateurs de *même nature* ($\forall\forall$ ou $\exists\exists$). En revanche, $(\forall y)(\exists x)p(x, y)$ et $(\exists x)(\forall y)p(x, y)$ ne sont pas équivalentes : dans la première, x peut dépendre de y ; dans la seconde, x est fixé indépendamment de y .

Exemple

Pour chacune des propositions suivantes :

- 1 donner sa valeur de vérité ;
- 2 écrire sa négation.

a) $(\forall x \in \mathbb{R}), x^2 \geq 1$.

b) $(\forall n \in \mathbb{N}), n(n+1)$ est divisible par 2.

c) $(\exists x \in \mathbb{R}), x^2 + 1 = 0$.

d) $(\exists! x \in \mathbb{R}), x^2 - 6x + 9 = 0$.

e) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}), y < -x$.

f) $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}), y < -x$.

Application

- 1 Écrire à l'aide des quantificateurs :

- Pour tout entier naturel n , il existe un entier naturel k tel que $n \leq k$.
- Le carré de tout réel est positif.
- f est une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ et constante.

- 2 Donner la négation de :

- $(\forall x \in \mathbb{R}), x \geq 2 \Rightarrow x^2 \geq 4$.
- $(\forall a, b \in \mathbb{R}), (a^2 + b^2 \geq ab \text{ ou } a^2 + 1 \neq a)$.

Exercice à la maison

Montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in]-\infty; 1[), 3x^2y - x + y = 0.$$

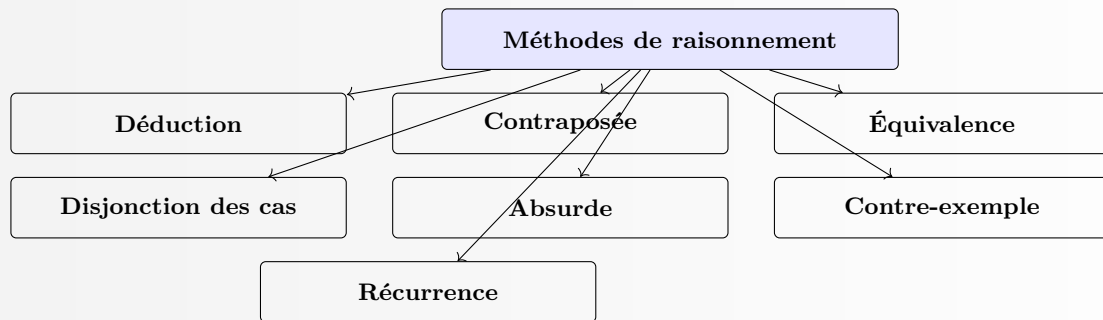
3 Lois logiques et méthodes de raisonnement

Définition

Une **loi logique** est une proposition construite à partir d'autres propositions liées par des connecteurs et qui est *vraie indépendamment* des valeurs de vérité de ses composantes.

Remarque

Schéma récapitulatif des méthodes de raisonnement. Pour démontrer une proposition mathématique, on dispose des techniques suivantes :



3.1 Raisonnement par déduction

Propriété

Le raisonnement par déduction consiste à appliquer la loi logique du *modus ponens* :

$$(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q.$$

En d'autres termes, si p est vraie et si l'implication $p \Rightarrow q$ est vraie, alors q est vraie.

Exemple

Démontrer par déduction les implications suivantes :

1 $\forall x, y \in \mathbb{R}, (0 < x < 2 \text{ et } 0 < y < 2) \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} > 1.$

2 $\forall x \in \mathbb{R}^+, \frac{1}{1 + \sqrt{x}} = 1 - \sqrt{x} \Rightarrow x = 0.$

Application

Montrer que pour tous réels a et b :

$$a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow |a + b| \leq \sqrt{2}.$$

(Indication : remarquer que $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$.)

Exercice à la maison

1 Montrer que $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = b = 0.$

2 Soient $x, y \in \mathbb{R}^+$. Montrer que $x + y + 2 = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} \Rightarrow x = y = 1.$

3.2 Raisonnement par contraposée

Propriété

L'implication $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ s'appelle la **contraposée** de l'implication $p \Rightarrow q$, et l'on a :

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{q} \Rightarrow \bar{p}).$$

Pour démontrer $p \Rightarrow q$, il suffit donc de démontrer sa contraposée $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$.

Exemple

Démontrer en utilisant la contraposée :

1 $\forall x \in \mathbb{R}^+, x \neq 4 \Rightarrow \sqrt{x} - 1 \neq \frac{x}{4}.$

2 $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 \text{ pair} \Rightarrow n \text{ pair}.$

Application

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer par contraposée que :

$$(x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1) \implies x \neq y.$$

Exercice à la maison

1 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : n^2$ est divisible par 5 $\Rightarrow n$ est divisible par 5.

2 Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$xy \neq 1 \text{ et } x \neq y \Rightarrow \frac{x}{x^2 + x + 1} \neq \frac{y}{y^2 + y + 1}.$$

3.3 Raisonnement par équivalence

Propriété

Pour montrer qu'une équivalence $p \Leftrightarrow q$ est vraie, on peut :

- soit établir une chaîne d'équivalences $p \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow q$ à l'aide de propriétés et d'opérations mathématiques ;
- soit montrer que les deux implications $p \Rightarrow q$ et $q \Rightarrow p$ sont toutes les deux vraies.

Exemple

Démontrer les équivalences suivantes :

1 $\forall x \in \mathbb{R}, |x-1| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{5} < \frac{1}{x+1} < \frac{2}{3}.$

2 $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, (a+b)^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow ab = 0.$

Application

Soient $a, b \in \mathbb{R}^+$. Montrer que :

$$a + b = 0 \Leftrightarrow a = b = 0.$$

Exercice à la maison

- 1 Montrer que $\forall x \in [1; +\infty[, \frac{\sqrt{x-1}}{x} \leq \frac{1}{2}$.
- 2 Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x| + |y| = |x + y| \Leftrightarrow xy \geq 0$.

3.4 Raisonnement par disjonction des cas

Propriété

Pour montrer qu'une proposition du type $\forall x \in E, p(x)$ est vraie, il suffit de partitionner E en plusieurs sous-ensembles et de montrer que $p(x)$ est vraie sur chacun de ces sous-ensembles.

Exemple

Démontrer par disjonction des cas :

- 1 $\forall x \in \mathbb{R}, |x - 1| \leq x^2 - x + 1$.
- 2 $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2 + 1} + x > 0$.

Application

Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$|x| + |x - 1| \geq 1.$$

Préciser pour quelles valeurs de x l'égalité a lieu.

Exercice à la maison

- 1 Montrer que $n(n+1)(n+2)$ est multiple de 3 pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 - |x - 2| + 5 = 0$.

3.5 Raisonnement par l'absurde

Propriété

Pour démontrer qu'une proposition p est vraie, on suppose qu'elle est fausse (c'est-à-dire que $\bar{p}$ est vraie) et l'on cherche à aboutir à une *contradiction* avec un résultat connu ou avec une hypothèse.

Exemple

Démontrer par l'absurde :

- 1 Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $A = \frac{n+3}{n+5}$. Montrer que $A \neq 1$.
- 2 Soit ABC un triangle et $a > 0$ tels que $BC = 3a$, $CA = 2a$ et $AB = 4a$. Montrer que ABC n'est pas un triangle rectangle.

Application

Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

(Indication : supposer $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec $\text{pgcd}(p, q) = 1$, élever au carré et étudier la parité.)

Exercice à la maison

1 Soient $a, b \in \mathbb{Q}$. Montrer que $a - \sqrt{2}b = 0 \Rightarrow a = b = 0$.

2 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{\frac{n}{n+1}} \notin \mathbb{Q}$.

3.6 Raisonnement par contre-exemple

Propriété

Pour montrer qu'une proposition de type $(\forall x \in E), p(x)$ est *fausse*, il suffit de trouver un élément x de E pour lequel $p(x)$ est fausse. Un tel élément s'appelle un **contre-exemple**.

Exemple

Pour chaque proposition, donner sa valeur de vérité et fournir un contre-exemple si elle est fausse.

1 $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x - 2 = 0$.

2 $\forall x \in [-1; 1], x^2 \geq x$.

3 $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \sqrt{a^2 + b^2} = a + b$.

Application

Étudier la valeur de vérité des propositions suivantes ; en cas de fausseté, donner un contre-exemple.

1 Tous les nombres premiers sont impairs.

2 $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 + n + 1$ est premier.

3 $\forall x, y \in \mathbb{R}, \cos(x + y) = \cos(x) + \cos(y)$.

Exercice à la maison

Étudier la valeur de vérité des propositions suivantes ; en cas de fausseté, donner un contre-exemple.

1 Tous les nombres impairs sont premiers.

2 $\forall x, y \in \mathbb{R}, 2x + 4y = 5$.

3 $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x^2 - xy + y^2 = 0$.

3.7 Raisonnement par récurrence

Propriété

Soit $p(n)$ une fonction propositionnelle définie sur $\mathbb{N}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$. Pour démontrer que la proposition $(\forall n \geq n_0), p(n)$ est vraie, on procède en **trois étapes** :

- 1 Initialisation : on vérifie que $p(n_0)$ est vraie.
- 2 Hérédité : on suppose que $p(n)$ est vraie pour un certain $n \geq n_0$ (*hypothèse de récurrence*), et l'on démontre que $p(n+1)$ est alors vraie.
- 3 Conclusion : d'après le principe de récurrence, $p(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Exemple

Démontrer par récurrence :

- 1 $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.
- 2 Soit $a \in \mathbb{R}^+$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, (1+a)^n \geq 1+na$.
- 3 $\forall n \in \mathbb{N}, 7$ divise $2^{3n+2} - 4$.

Application

Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exercice à la maison

Démontrer par récurrence :

- 1 $\forall n \in \mathbb{N}^*, 3^1 + 3^2 + \dots + 3^n = \frac{3^{n+1} - 3}{2}$.
- 2 $\forall n \in \mathbb{N}, 1 + 3 + \dots + (2n+1) = (n+1)^2$.
- 3 $\forall n \in \mathbb{N}, 3^n \geq 2n+1$.
- 4 $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$.