

Cette série couvre l'ensemble du chapitre : valeurs de vérité, connecteurs logiques, quantificateurs, négation, et toutes les méthodes de raisonnement (déduction, contraposée, équivalence, disjonction des cas, absurde, contre-exemple, récurrence).

Exercice 1

1

Donner la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes.

1 $p : \sqrt{16} + \sqrt{9} = 7.$

2 $q : (2 + \sqrt{3})^2 = 7 + 4\sqrt{3}.$

3 $r : \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5}.$

4 $s : \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1.$

Exercice 2

2

Soient p, q deux propositions. Préciser la valeur de vérité des propositions suivantes.

1 $p : 12$ est un multiple de 4 et un multiple de 6.

2 $q : \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ ou $\pi^2 < 10.$

3 $r : 0 \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 \in \mathbb{Z}.$

4 $s : (5 + 5 = 11) \Leftrightarrow (3 < 2).$

Exercice 3

3

Pour chacune des propositions suivantes :

1 donner sa valeur de vérité ;

2 écrire sa négation.

a) $(\forall x \in \mathbb{R}), x^2 + 1 > 0.$

b) $(\exists x \in \mathbb{R}), x^2 = 2.$

c) $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N}), m > n.$

d) $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}), x + y = 0.$

Exercice 4

4

Écrire chacune des phrases suivantes à l'aide des quantificateurs.

1 Tout entier naturel non nul a un carré strictement positif.

2 Il existe un réel positif dont le cube vaut 8.

3 Pour tout réel x , il existe un réel y tel que $x + y = 1.$

4 Aucun entier naturel n'est strictement négatif.

Exercice 5

5

Soient a et b deux réels positifs. Montrer par déduction que :

$$a + b \leq 2 \implies ab \leq 1.$$

(On pourra utiliser l'inégalité $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0.$)

Exercice 6

6

- 1 Montrer par contraposée que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n^2 \text{ est divisible par } 3 \implies n \text{ est divisible par } 3.$$

- 2 En déduire que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 7

7

Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer par disjonction des cas que :

$$|x| + |x - 1| \geq 1.$$

Préciser le ou les cas pour lesquels l'égalité a lieu.

Exercice 8

8

Montrer que pour tous réels a et b :

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 \iff ab = 0.$$

Exercice 9

9

Soient a, b et c trois nombres réels.

Montrer par l'absurde que si $a + b + c > 0$, alors au moins l'un des trois nombres a, b, c est strictement positif.

Exercice 10

10

Montrer par récurrence que :

1 $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$

2 $\forall n \in \mathbb{N}, 4^n - 1$ est divisible par 3.

Exercice 11

11

Soient x et y deux réels positifs.

1 Montrer que $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}.$

2 En déduire que si $xy = 1$, alors $x + y \geq 2.$

3 Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2$. Montrer par contraposée que :

$$x + y < 2 \implies xy < 1.$$

Exercice 12

12

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, en justifiant par une démonstration ou par un contre-exemple.

1 $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 = y^2 \Rightarrow x = y.$

2 $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq x.$

3 $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n+1}.$

4 $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \sqrt{x^2 + y^2} = |x| + |y|.$