

Table des matières

1	Rappels sur les ensembles de nombres	2
2	Entiers naturels et parité	2
3	Multiples et diviseurs	3
4	Division euclidienne	4
5	Nombres premiers et décomposition	4
6	PGCD et PPCM	5
6.1	Algorithme d'Euclide	5

OBJECTIFS DU CHAPITRE

À la fin de ce chapitre, l'élève doit être capable de :

- distinguer les ensembles de nombres et utiliser correctement les symboles d'appartenance et d'inclusion ;
- reconnaître la parité d'un entier naturel ;
- utiliser les notions de multiple et de diviseur ;
- effectuer une division euclidienne ;
- reconnaître un nombre premier et décomposer un entier en facteurs premiers ;
- calculer un PGCD et un PPCM.

1 Rappels sur les ensembles de nombres

DÉFINITION

On distingue les ensembles usuels suivants :

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$: ensemble des entiers naturels ;
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$: ensemble des entiers relatifs ;
- $\mathbb{D} = \left\{\frac{a}{10^n} ; a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$: ensemble des nombres décimaux ;
- $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} ; a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*\right\}$: ensemble des nombres rationnels ;
- $\mathbb{R}$: ensemble des nombres réels.

Ces ensembles vérifient la chaîne d'inclusions

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

REMARQUE

Soient x un nombre et A, B deux ensembles.

- $x \in A$ signifie que x **appartient** à A .
- $x \notin A$ signifie que x **n'appartient pas** à A .
- $A \subset B$ signifie que A est **inclus** dans B : tout élément de A appartient à B .
- $A \not\subset B$ signifie que A n'est pas inclus dans B .

Le symbole $\in$ relie un **élément** à un ensemble, tandis que le symbole $\subset$ relie deux **ensembles**.

EXEMPLE

Déterminer le plus petit ensemble parmi $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ auquel appartient chacun des nombres suivants :

$$-7, \quad \frac{3}{8}, \quad \frac{1}{3}, \quad \sqrt{49}, \quad -\sqrt{5}.$$

APPLICATION

Compléter par $\in, \notin, \subset$ ou $\not\subset$:

$$-7 \dots \mathbb{N}, \quad \frac{2}{5} \dots \mathbb{D}, \quad \mathbb{N} \dots \mathbb{Q}, \quad \mathbb{Q} \dots \mathbb{Z}.$$

2 Entiers naturels et parité

DÉFINITION

On note $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, \dots\}$ l'ensemble des entiers naturels non nuls. Le nombre 0 est le plus petit élément de $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}$ n'admet pas de plus grand élément.

Soit $n \in \mathbb{N}$:

- n est **pair** s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$.
- n est **impair** s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$.

PROPRIÉTÉ

Tout entier naturel est soit pair, soit impair, et jamais les deux à la fois. De plus :

- La somme de deux entiers de même parité est paire.
- La somme de deux entiers de parités différentes est impaire.
- Le produit de deux entiers consécutifs est pair.

EXEMPLE

Étudier la parité des nombres suivants :

$$17, \quad 24, \quad 17 + 24, \quad 17 \times 24.$$

APPLICATION

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- 1 Montrer que $n(n+1)$ est pair.
- 2 Déterminer la parité de $n^2 + n + 1$.

3 Multiples et diviseurs

DÉFINITION

Soient $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. On dit que a est un **multiple** de b , ou que b est un **diviseur** de a , s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$a = kb.$$

PROPRIÉTÉ

Si d divise a et b , alors d divise $a + b$ et, lorsque $a \geq b$, $a - b$. Si d divise a , alors d divise tout multiple de a .

EXEMPLE

À partir de l'égalité $24 = 3 \times 8$, citer deux diviseurs de 24 et deux multiples de 3.

PROPRIÉTÉ

Un entier naturel est divisible par :

- 2 si son chiffre des unités est pair ;
- 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3 ;
- 4 si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4 ;
- 5 si son chiffre des unités est 0 ou 5 ;
- 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9 ;
- 10 si son chiffre des unités est 0.

EXEMPLE

Étudier la divisibilité de 2310 par 2, 3, 4, 5, 9 et 10.

APPLICATION

- 1 Déterminer les diviseurs de 36.
- 2 Montrer que si a et b sont des multiples de d , alors $3a + 2b$ est un multiple de d .

4 Division euclidienne

THÉORÈME

Soient $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. Il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{N}^2$ tel que

$$a = bq + r \quad \text{et} \quad 0 \leq r < b.$$

q est le quotient et r est le reste de la division euclidienne de a par b .

Dans cette égalité, a est le dividende, b le diviseur, q le quotient et r le reste. En particulier, b divise a si et seulement si le reste de la division euclidienne de a par b est nul.

EXEMPLE

Effectuer la division euclidienne de 427 par 23, puis identifier le quotient et le reste.

APPLICATION

Effectuer la division euclidienne de 1234 par 56, puis de 245 par 13.

5 Nombres premiers et décomposition

DÉFINITION

Un entier naturel $p \geq 2$ est **premier** s'il admet exactement deux diviseurs : 1 et p . Les nombres 0 et 1 ne sont ni premiers ni composés. Un entier naturel supérieur ou égal à 2 qui n'est pas premier est appelé **nombre composé**.

PROPOSITION

Pour vérifier qu'un entier $n \geq 2$ est premier, il suffit de tester sa divisibilité par les nombres premiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{n}$.

EXEMPLE

Déterminer si les nombres 127 et 217 sont premiers ou composés.

THÉORÈME

Tout entier naturel $n \geq 2$ se décompose de manière unique, à l'ordre des facteurs près, en produit de nombres premiers.

Pour obtenir cette décomposition, on divise successivement le nombre par 2, puis par 3, 5, 7, et ainsi de suite, jusqu'à obtenir 1.

EXEMPLE

Décomposer 360 en produit de facteurs premiers.

APPLICATION

Décomposer 756 en produit de facteurs premiers.

6 PGCD et PPCM

DÉFINITION

Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$.

- $\text{PGCD}(a; b)$ est le plus grand diviseur commun de a et b .
- $\text{PPCM}(a; b)$ est le plus petit multiple commun non nul de a et b .
- a et b sont premiers entre eux lorsque $\text{PGCD}(a; b) = 1$.

PROPRIÉTÉ

Méthode par décomposition. À partir des décompositions en facteurs premiers :

- le PGCD utilise les facteurs communs avec les plus petits exposants ;
- le PPCM utilise tous les facteurs avec les plus grands exposants.

De plus,

$$\text{PGCD}(a; b) \times \text{PPCM}(a; b) = ab.$$

EXEMPLE

Calculer $\text{PGCD}(120; 84)$ et $\text{PPCM}(120; 84)$ à partir des décompositions en facteurs premiers, puis vérifier la relation entre le PGCD et le PPCM.

6.1 Algorithme d'Euclide

PROPRIÉTÉ

Si $a = bq + r$, alors

$$\text{PGCD}(a; b) = \text{PGCD}(b; r).$$

En répétant les divisions euclidiennes, le PGCD est le dernier reste non nul.

EXEMPLE

Calculer $\text{PGCD}(252; 105)$ en utilisant l'algorithme d'Euclide.

APPLICATION

- 1 Décomposer 756 et 540 en facteurs premiers.
- 2 En déduire leur PGCD et leur PPCM.
- 3 Vérifier les résultats avec la relation entre le PGCD et le PPCM.