

Exercice

n°1

1. Déterminer le plus petit ensemble parmi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ auquel appartient chacun des nombres suivants :

$$-12, \quad \frac{7}{20}, \quad \frac{5}{6}, \quad \sqrt{81}, \quad -\sqrt{3}.$$

2. Compléter par $\in$, $\notin$, $\subset$ ou $\not\subset$:

$$-12 \dots \mathbb{N}, \quad \frac{7}{20} \dots \mathbb{D}, \quad \mathbb{N} \dots \mathbb{Q}, \quad \mathbb{Q} \dots \mathbb{Z}.$$

Exercice

n°2

1. Soient a et b deux entiers naturels. Montrer que si l'un d'eux est pair, alors $a \times b$ est pair.
2. Soit n un entier naturel. Étudier la parité des nombres suivants :

$$A = (2n + 7)(2n + 6), \quad B = 12n + 5, \quad C = n(n + 1)(n + 2), \quad D = n^2 + 4n + 8.$$

Exercice

n°3

1. Montrer que si a est un multiple de 3 et b un nombre pair, alors $2a + 3b$ est un multiple de 6.
2. Soit n un entier naturel. Montrer que $n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$ est un multiple de 4.
3. Existe-t-il un entier naturel n tel que $n(n + 1)(n + 2)(n + 3) = 2010$?

Exercice

n°4

Soit n un entier naturel impair.

1. Montrer que $n^2 - 1$ est divisible par 8.
2. En déduire que $n^4 - 1$ est divisible par 16.
3. Soit m un entier naturel tel que $m \geq 4$ et $m - 4$ est un multiple de 5. Montrer que $m^2 - 1$ est un multiple de 5.

Exercice

n°5

1. Déterminer tous les chiffres a tels que le nombre $\overline{5a74}$ soit divisible par 3.
2. Déterminer le chiffre b tel que le nombre $\overline{815b}$ soit divisible à la fois par 2 et par 9.
3. Déterminer tous les chiffres c tels que le nombre $\overline{921c}$ soit divisible par 3 mais pas par 9.

Exercice

n°6

1. Effectuer la division euclidienne de 987 par 23, puis celle de 2025 par 37.
2. Calculer PGCD(391; 299) en utilisant l'algorithme d'Euclide.

Exercice

n°7

Déterminer si chacun des nombres 97 et 221 est premier ou composé. Lorsqu'un nombre est composé, le décomposer en facteurs premiers.

Exercice

n°8

1. Décomposer en facteurs premiers a et b , puis déterminer PGCD(a ; b) et PPCM(a ; b) dans chacun des cas suivants :
(a) $a = 120$, $b = 82$.
(b) $a = 1176$, $b = 7425$.
(c) $a = 12\,375$, $b = 6860$.

Exercice**n°9**

Soient $a = 2160$ et $b = 4860$.

1. Décomposer en facteurs premiers les nombres a et b .
2. En déduire une décomposition en facteurs premiers des nombres a^3b^2 et a^3b^3 .
3. Simplifier les expressions : $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$.
4. Montrer que $\sqrt{a \times b}$ est un entier naturel.
5. Simplifier la fraction $\frac{a}{b}$.

Exercice**n°10**

Soient n un entier naturel, et a, b deux entiers naturels définis par :

$$b = 3 \cdot 7^{n+1} + 5 \cdot 7^n \quad \text{et} \quad a = 7^{n+2} - 7^n.$$

1. Montrer que a est un multiple de 3 et b un multiple de 13.
2. Décomposer a et b en facteurs premiers.
3. En déduire $\text{PGCD}(a; b)$ et $\text{PPCM}(a; b)$.

Exercice**n°11**

Soit m un entier naturel.

1. Montrer que si m est pair, alors m^2 est pair.
2. Montrer que si m est impair, alors m^2 est impair.
3. Tout nombre impair est-il premier ? Justifier.
4. Tout nombre premier est-il impair ? Justifier.

Exercice**n°12**

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$.

1. Développer $(n^2 + 2)^2$.
2. Écrire $n^4 + 4$ sous forme de différence de deux carrés parfaits ^a.
3. En déduire que $n^4 + 4$ est un nombre composé.
4. Écrire les nombres suivants comme somme de deux carrés de naturels consécutifs :

$$5, \quad 13, \quad 25, \quad 41, \quad 61.$$

a. Un carré parfait est le carré d'un entier naturel.

Exercice**n°13**

Pour tout entier naturel n , on pose $f(n) = 9^n + 5^n + 2$.

1. Calculer $f(0)$ et $f(1)$.
2. (a) Montrer que $f(n+1) = 9f(n) - 4 \cdot 5^n - 16$.
(b) En déduire que si 4 divise $f(n)$, alors 4 divise $f(n+1)$.
(c) Conclure par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $f(n)$ est divisible par 4.

Exercice**n°14**

Soient a et b deux entiers naturels vérifiant :

$$\begin{cases} a + b &= 504 \\ \text{PGCD}(a; b) &= 24 \end{cases}$$

Déterminer toutes les valeurs possibles de $(a; b)$.

Exercice**n°15**

1. Déterminer tous les diviseurs de 15.
2. Déterminer tous les couples $(x; y)$ d'entiers naturels qui vérifient :

$$(x - 2)(y + 2) = 15.$$

Exercice**n°16**

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $A = n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1$.
Montrer que A est un carré parfait.

Exercice**n°17**

1. Déterminer tous les entiers naturels n tels que $\frac{n + 15}{n + 3} \in \mathbb{N}$.
2. Déterminer tous les entiers naturels n tels que $\frac{2n + 11}{n + 1} \in \mathbb{N}$.