2025/2026
Professeur : N.Sabi

Série : Arithmétique dans $\mathbb{N}$

Tronc Commun Sciences BIOF

Exercice 1

1. Déterminer le plus petit ensemble parmi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ auquel appartient chacun des nombres suivants :
$$-12, \qquad \frac{7}{20}, \qquad \frac{5}{6}, \qquad \sqrt{81}, \qquad -\sqrt{3}.$$
2. Compléter par $\in$, $\notin$, $\subset$ ou $\not\subset$:
$$-12 \ \ldots \ \mathbb{N}, \qquad \frac{7}{20} \ \ldots \ \mathbb{D}, \qquad \mathbb{N} \ \ldots \ \mathbb{Q}, \qquad \mathbb{Q} \ \ldots \ \mathbb{Z}.$$

Exercice 2

1. Soient a et b deux entiers naturels. Montrer que si l'un d'eux est pair, alors $a \times b$ est pair.
2. Soit n un entier naturel. Étudier la parité des nombres suivants :
$$A = (2n+7)(2n+6), \qquad B = 12n+5, \qquad C = n(n+1)(n+2), \qquad D = n^2+4n+8.$$

Exercice 3

1. Montrer que si a est un multiple de 3 et b un nombre pair, alors $2a+3b$ est un multiple de 6.
2. Soit n un entier naturel. Montrer que $n(n+1)(n+2)(n+3)$ est un multiple de 4.
3. Existe-t-il un entier naturel n tel que $n(n+1)(n+2)(n+3) = 2010$?

Exercice 4

Soit n un entier naturel impair.

1. Montrer que n^2-1 est divisible par 8.
2. En déduire que n^4-1 est divisible par 16.
3. Soit m un entier naturel tel que $m \geq 4$ et $m-4$ est un multiple de 5. Montrer que m^2-1 est un multiple de 5.

Exercice 5

1. Déterminer tous les chiffres a tels que le nombre $\overline{5a74}$ soit divisible par 3.
2. Déterminer le chiffre b tel que le nombre $\overline{815b}$ soit divisible à la fois par 2 et par 9.
3. Déterminer tous les chiffres c tels que le nombre $\overline{921c}$ soit divisible par 3 mais pas par 9.

Exercice 6

1. Effectuer la division euclidienne de 987 par 23, puis celle de 2025 par 37.
2. Calculer PGCD$(391\,;299)$ en utilisant l'algorithme d'Euclide.

Exercice 7

Déterminer si chacun des nombres 97 et 221 est premier ou composé. Lorsqu'un nombre est composé, le décomposer en facteurs premiers.

Exercice 8

1. Décomposer en facteurs premiers a et b, puis déterminer PGCD$(a;b)$ et PPCM$(a;b)$ dans chacun des cas suivants :
   (a) $a = 120, \quad b = 82.$
   (b) $a = 1176, \quad b = 7425.$
   (c) $a = 12\,375, \quad b = 6860.$

Exercice 9

Soient $a = 2160$ et $b = 4860$.

1. Décomposer en facteurs premiers les nombres a et b.
2. En déduire une décomposition en facteurs premiers des nombres a^3b^2 et a^3b^3.
3. Simplifier les expressions : $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$.
4. Montrer que $\sqrt{a \times b}$ est un entier naturel.
5. Simplifier la fraction $\dfrac{a}{b}$.

Exercice 10

Soient n un entier naturel, et a, b deux entiers naturels définis par :

$$b = 3 \cdot 7^{n+1} + 5 \cdot 7^n \qquad \text{et} \qquad a = 7^{n+2} - 7^n.$$

1. Montrer que a est un multiple de 3 et b un multiple de 13.
2. Décomposer a et b en facteurs premiers.
3. En déduire PGCD$(a;b)$ et PPCM$(a;b)$.

Exercice 11

Soit m un entier naturel.

1. Montrer que si m est pair, alors m^2 est pair.
2. Montrer que si m est impair, alors m^2 est impair.
3. Tout nombre impair est il premier ? Justifier.
4. Tout nombre premier est il impair ? Justifier.

Exercice 12

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$.

1. Développer $(n^2 + 2)^2$.
2. Écrire $n^4 + 4$ sous forme de différence de deux carrés parfaits [a].
3. En déduire que $n^4 + 4$ est un nombre composé.
4. Écrire les nombres suivants comme somme de deux carrés de naturels consécutifs :

$$5, \quad 13, \quad 25, \quad 41, \quad 61.$$

a. Un carré parfait est le carré d'un entier naturel.

Exercice 13

Pour tout entier naturel n, on pose $f(n) = 9^n + 5^n + 2$.

1. Calculer $f(0)$ et $f(1)$.
2. (a) Montrer que $f(n+1) = 9\,f(n) - 4 \cdot 5^n - 16$.

(b) En déduire que si 4 divise $f(n)$, alors 4 divise $f(n+1)$.

(c) Conclure par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $f(n)$ est divisible par 4.

Exercice 14

Soient a et b deux entiers naturels vérifiant :

$$\begin{cases} a+b & = 504 \\ \text{PGCD}(a;b) & = 24 \end{cases}$$

Déterminer toutes les valeurs possibles de $(a;b)$.

Exercice 15

1. Déterminer tous les diviseurs de 15.
2. Déterminer tous les couples $(x;y)$ d'entiers naturels qui vérifient :

$$(x-2)(y+2) = 15.$$

Exercice 16

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $A = n(n+1)(n+2)(n+3)+1$.
Montrer que A est un carré parfait.

Exercice 17

1. Déterminer tous les entiers naturels n tels que $\dfrac{n+15}{n+3} \in \mathbb{N}$.
2. Déterminer tous les entiers naturels n tels que $\dfrac{2n+11}{n+1} \in \mathbb{N}$.