

Série d'exercices N°4 (S2)

Arithmétique

1^{ère} Année Baccalauréat – Sciences Mathématiques

Consignes. Pour chaque PGCD, expliciter l'algorithme d'Euclide. Pour les équations de Bézout, donner u et v explicitement.

Couverture. 12 exercices : divisibilité, division euclidienne, PGCD, Bézout, Gauss, congruences, divisibilité par récurrence.

I. Divisibilité

Exercice 1 *Critères de divisibilité*

1. Parmi 231, 1232, 9438, 7777, 20 355, lesquels sont divisibles par 3 ? par 9 ? par 11 ?
2. Trouver les chiffres a, b tels que $\overline{8a5b}$ soit divisible par 45.
3. Trouver le chiffre a tel que $\overline{15a6}$ soit divisible par 11.

Exercice 2 *Propriétés de la divisibilité*

Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

1. Démontrer que si $a \mid b$ et $a \mid c$, alors $a \mid (3b - 2c)$.
2. Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, 3 \mid n^3 - n$.
3. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 6 \mid n(n+1)(n+2)$.

II. Division euclidienne

Exercice 3 *Calculs*

Donner le quotient et le reste dans la division euclidienne de :

1. 1234 par 17.
2. -1234 par 17.
3. 5^{50} par 7 (*indication* : étudier les puissances de 5 modulo 7).
4. $123 \cdot 456$ par 7.

Exercice 4 *Application*

Le 1^{er} janvier 2024 est un lundi. Quel jour est le 1^{er} janvier 2030 ? *Indication* : compter les jours et faire la division euclidienne par 7. Attention aux années bissextiles.

III. PGCD et Bézout

Exercice 5 *Algorithme d'Euclide*

Calculer en détaillant l'algorithme d'Euclide :

1. $\text{pgcd}(168, 252)$.
2. $\text{pgcd}(741, 247)$.
3. $\text{pgcd}(1989, 1071)$.
4. $\text{pgcd}(2024, 1224)$.

Exercice 6 *Identité de Bézout*

Pour chaque couple, trouver $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $au + bv = \text{pgcd}(a, b)$ (algorithme d'Euclide étendu).

1. $a = 35, b = 24$.
2. $a = 91, b = 65$.
3. $a = 123, b = 51$.

Exercice 7 *Équations diophantiennes*

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$:

1. $7x + 5y = 3$.
2. $15x - 9y = 12$.
3. $36x + 24y = 60$.
4. $5x + 3y = 1$, et donner toutes les solutions.

IV. Théorèmes de Bézout et Gauss

Exercice 8 *Théorème de Bézout*

1. Démontrer que $5n + 3$ et $3n + 2$ sont premiers entre eux pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Démontrer que $(n + 1)$ et $(2n + 1)$ sont premiers entre eux pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Soient $a, b \in \mathbb{N}$ avec $\text{pgcd}(a, b) = 1$. Démontrer que $\text{pgcd}(a, a + b) = 1$.

Exercice 9 *Lemme de Gauss*

Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

1. Démontrer que si $a \mid bc$ et $\text{pgcd}(a, b) = 1$, alors $a \mid c$.
2. En déduire : si $a \mid n$ et $b \mid n$ et $\text{pgcd}(a, b) = 1$, alors $ab \mid n$.
3. Démontrer que si $\text{pgcd}(a, b) = 1$ et $\text{pgcd}(a, c) = 1$, alors $\text{pgcd}(a, bc) = 1$.

V. Congruences

Exercice 10 *Calculs avec congruences*

1. Déterminer le reste de 2^{2024} dans la division par 5.
2. Déterminer le reste de 7^{100} dans la division par 13.
3. Déterminer le dernier chiffre de 7^{2024} (i.e. modulo 10).
4. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $11 \mid 3^{2n+1} + 2^{n+2}$.

Exercice 11 *Divisibilité par récurrence et congruences*

Démontrer que :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, 8 \mid 3^{2n} - 1$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}, 7 \mid 3^{2n+1} + 2^{n+2}$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}, 9 \mid 4^n + 6n - 1$.
4. $\forall n \in \mathbb{N}, \text{pgcd}(2^n + 1, 2^{n+1} + 1) \in \{1, 3\}$.

VI. Problèmes de synthèse

Exercice 12 *Système et congruences chinoises*

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}$: $x \equiv 2 \pmod{5}$ et $x \equiv 3 \pmod{7}$.
2. Trouver tous les entiers x tels que $x \equiv 1 \pmod{4}$, $x \equiv 2 \pmod{9}$ et $x \equiv 3 \pmod{25}$.

Fin de la série – Arithmétique