

Série d'exercices N°5

Barycentre dans le plan

1^{ère} Année Baccalauréat – Sciences Mathématiques

Consignes. Pour chaque barycentre, vérifier la condition $\sum \alpha_i \neq 0$. Utiliser systématiquement le théorème de réduction et l'associativité pour simplifier.

Couverture. 12 exercices : définition, coordonnées, réduction, alignement, concourance, lieux géométriques.

I. Calculs et coordonnées

Exercice 1 Construction et coordonnées

Dans un repère orthonormé, on considère $A(2, -1)$, $B(-4, 5)$, $C(1, 3)$.

1. Calculer les coordonnées du barycentre $G_1 = \text{bar}\{(A, 2); (B, 1)\}$.
2. Calculer les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC .
3. Calculer $G_2 = \text{bar}\{(A, 3); (B, -1); (C, 2)\}$.
4. Calculer $G_3 = \text{bar}\{(A, 1); (B, -1); (C, 4)\}$.

Exercice 2 Homogénéité et identification

1. Montrer que $\text{bar}\{(A, 2); (B, 4)\} = \text{bar}\{(A, 1); (B, 2)\}$.
2. Soit $G = \text{bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ avec $\alpha + \beta \neq 0$. Trouver une condition sur α, β pour que G soit le milieu de $[AB]$.
3. Soit $G = \text{bar}\{(A, 3); (B, -1)\}$. Exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$. G est-il sur le segment $[AB]$?

II. Réduction vectorielle

Exercice 3 Réduction

Soient A et B deux points fixes, M un point variable. Réduire les expressions suivantes (faire apparaître un barycentre si possible).

1. $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}$.
2. $4\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}$.
3. $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}$.
4. $5\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB} - 10\overrightarrow{MO}$ où O est un point fixe.

Exercice 4 Réduction et lieux

Soient A, B deux points fixes du plan tels que $AB = 6$. Déterminer le lieu des points M vérifiant :

1. $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = 4$.
2. $\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = 9$.
3. $\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\| = 7$.
4. $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

III. Alignement et concourance

Exercice 5 *Alignement*

Soit ABC un triangle. On note A' , B' , C' les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$.

1. Exprimer A' , B' , C' comme barycentres.
2. Montrer que le centre de gravité G du triangle ABC est aussi le centre de gravité du triangle $A'B'C'$.

Exercice 6 *Concourance des médianes*

Soit ABC un triangle, G son centre de gravité, A' le milieu de $[BC]$.

1. En utilisant l'associativité du barycentre, montrer que $G = \text{bar}\{(A, 1); (A', 2)\}$.
2. En déduire que G est sur la médiane (AA') avec $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$.
3. En déduire la concourance des médianes.

IV. Lieux géométriques

Exercice 7 *Lieux : cercles et droites*

Soient A , B , C trois points fixes non alignés.

1. Déterminer le lieu des M tels que $\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\| = \|3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\|$. (*Indication* : introduire deux barycentres.)
2. Déterminer le lieu des M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ (où $\cdot$ désigne le produit scalaire). *Reconnaître un cercle célèbre.*
3. Déterminer le lieu des M tels que $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 6$.

V. Coordonnées du centre du cercle inscrit

Exercice 8 *Centre du cercle inscrit*

Soit ABC un triangle de côtés $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. On admet (et on prouvera) que le centre du cercle inscrit I est le barycentre :

$$I = \text{bar}\{(A, a); (B, b); (C, c)\}.$$

1. Vérifier la condition d'existence.
2. Dans un repère orthonormé avec $A(0,0)$, $B(6,0)$, $C(3,4)$, calculer a , b , c puis les coordonnées de I .

VI. Problèmes de synthèse

Exercice 9 *Configuration de quadrilatère*

Soit $ABCD$ un quadrilatère. On note I , J , K , L les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$.

1. Soit G le centre de gravité (isobarycentre) du quadrilatère $ABCD$: $G = \text{bar}\{(A, 1); (B, 1); (C, 1); (D, 1)\}$. Justifier l'existence.

2. Montrer que G est aussi le milieu commun de $[IK]$ et de $[JL]$.
3. En déduire que $IJKL$ est un parallélogramme (*Varignon*).

Exercice 10 *Médianes pondérées*

Soit ABC un triangle et $G_1 = \text{bar}\{(A, 1); (B, 2); (C, 3)\}$.

1. Construire G_1 en deux étapes (associativité).
2. Exprimer G_1 dans un repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
3. Soit M un point variable. Montrer que $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = 6\overrightarrow{MG_1}$.

Fin de la série – Barycentre