

Barycentre dans le plan

1^{ère} Année Baccalauréat – Sciences Mathématiques

Volume horaire officiel : 7h (cf. répartition 2013) – **Pré-requis** : calcul vectoriel, repères, opérations sur les vecteurs.

Capacités attendues : utiliser le barycentre pour simplifier une expression vectorielle ; pour prouver l'alignement de trois points ; pour démontrer la concourance de droites ; construire le barycentre de n points ($2 \leq n \leq 4$) ; utiliser le barycentre pour résoudre des problèmes et déterminer des lieux géométriques.

Table des matières

1	Barycentre de deux points pondérés	2
1.1	Point pondéré	2
1.2	Définition du barycentre	2
1.3	Position du barycentre	2
1.4	Cas particulier : isobarycentre	3
1.5	Homogénéité	3
2	Coordonnées du barycentre	4
2.1	Expression dans un repère	4
2.2	Réduction d'une expression vectorielle	4
3	Barycentre de plusieurs points pondérés	5
3.1	Barycentre de trois points	5
3.2	Centre de gravité d'un triangle	5
3.3	Associativité du barycentre	5
4	Applications	7
4.1	Alignement de trois points	7
4.2	Lieu géométrique	7
4.3	Concourance des droites	7
5	Synthèse	8
5.1	Récapitulatif	8
5.2	Pièges classiques	8

1. Barycentre de deux points pondérés

1.1 Point pondéré

Définition

Définition 1.1 — Un **point pondéré** est un couple (A, α) où A est un point du plan et $\alpha \in \mathbb{R}$ est un nombre réel appelé **coefficient** (ou **poids**, ou **masse**).

1.2 Définition du barycentre

Théorème

Théorème 1.1 — Soient (A, α) et (B, β) deux points pondérés du plan. Si $\alpha + \beta \neq 0$, il existe un *unique* point G du plan vérifiant :

$$\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \vec{0}.$$

Ce point G s'appelle le **barycentre** des points pondérés (A, α) et (B, β) . On note :

$$G = \text{bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}.$$

Démonstration

Existence et unicité. Soit O un point quelconque du plan. La relation $\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \vec{0}$ équivaut à :

$$\alpha(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OG}) + \beta(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OG}) = \vec{0} \Leftrightarrow (\alpha + \beta)\overrightarrow{OG} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}.$$

Comme $\alpha + \beta \neq 0$, cela définit $\overrightarrow{OG}$ de façon unique :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}}{\alpha + \beta}. \quad (*)$$

Le point G existe et est unique. □

1.3 Position du barycentre

Propriété

Propriété 1.1 — Soient $A \neq B$ et $G = \text{bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ avec $\alpha + \beta \neq 0$.

- G appartient à la droite (AB) .
- $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overrightarrow{AB}$.
- Si $\alpha\beta > 0$ (mêmes signes), G est sur le segment $[AB]$.
- Si $\alpha\beta < 0$, G est à l'extérieur de $[AB]$.

Démonstration

En appliquant (*) avec $O = A$: $\overrightarrow{AG} = \frac{\alpha\overrightarrow{AA} + \beta\overrightarrow{AB}}{\alpha + \beta} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overrightarrow{AB}$. Donc $G \in (AB)$.

Le coefficient $\lambda = \frac{\beta}{\alpha + \beta}$ détermine la position de G : $\lambda \in [0, 1] \Leftrightarrow G \in [AB]$, ce qui équivaut à $\alpha\beta \geq 0$ et $\alpha + \beta$ de même signe que β . □

1.4 Cas particulier : isobarycentre

Définition

Définition 1.2 — Le **milieu** I du segment $[AB]$ est le barycentre des points pondérés $(A, 1)$ et $(B, 1)$. On l'appelle aussi l'**isobarycentre** de A et B :

$$I = \text{bar}\{(A, 1); (B, 1)\} \quad \text{vérifie} \quad \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}.$$

1.5 Homogénéité

Propriété

Propriété 1.2 — (**Homogénéité du barycentre**) Soit $G = \text{bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ avec $\alpha + \beta \neq 0$. Pour tout $k \neq 0$:

$$G = \text{bar}\{(A, k\alpha); (B, k\beta)\}.$$

Démonstration

$$k\alpha\overrightarrow{GA} + k\beta\overrightarrow{GB} = k(\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB}) = k \cdot \vec{0} = \vec{0}.$$

□

Remarque

Grâce à l'homogénéité, on peut toujours *normaliser* les coefficients pour que $\alpha + \beta = 1$ (en divisant par $\alpha + \beta$). On parle alors de **barycentre normalisé**.

2. Coordonnées du barycentre

2.1 Expression dans un repère

Théorème

Théorème 2.1 — Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$. Le barycentre $G = \text{bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ avec $\alpha + \beta \neq 0$ a pour coordonnées :

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta} \quad ; \quad y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta}.$$

Démonstration

Direct par projection sur les axes de la relation vectorielle $\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB}}{\alpha + \beta}$. □

Exemple

Exemple 2.1 — Soient $A(1, -2)$, $B(5, 6)$ et $G = \text{bar}\{(A, 3); (B, 1)\}$.

$$x_G = \frac{3 \cdot 1 + 1 \cdot 5}{3 + 1} = \frac{8}{4} = 2 \quad ; \quad y_G = \frac{3 \cdot (-2) + 1 \cdot 6}{4} = \frac{0}{4} = 0.$$

Donc $G(2, 0)$.

2.2 Réduction d'une expression vectorielle

Théorème

Théorème 2.2 — (**Théorème fondamental de réduction**) Soit $G = \text{bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ avec $\alpha + \beta \neq 0$. Pour tout point M du plan :

$$\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta) \overrightarrow{MG}.$$

Démonstration

$\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} = \alpha(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) + \beta(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) = (\alpha + \beta) \overrightarrow{MG} + (\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB}) = (\alpha + \beta) \overrightarrow{MG}$,
puisque $\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \vec{0}$ par définition de G . □

Méthode

Réduction d'une expression $\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB}$:

1. Calculer $\alpha + \beta$.
2. Si $\alpha + \beta \neq 0$: poser $G = \text{bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$, alors $\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta) \overrightarrow{MG}$.
3. Si $\alpha + \beta = 0$: le résultat est un *vecteur constant* $\alpha \overrightarrow{BA}$.

3. Barycentre de plusieurs points pondérés

3.1 Barycentre de trois points

Théorème

Théorème 3.1 — Soient $(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)$ trois points pondérés du plan. Si $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, il existe un unique point G tel que :

$$\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} + \gamma \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

G est appelé le **barycentre** de $(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)$: $G = \text{bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$.

Démonstration

Identique au cas de deux points. Pour tout point O :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB} + \gamma \overrightarrow{OC}}{\alpha + \beta + \gamma}.$$

□

3.2 Centre de gravité d'un triangle

Définition

Définition 3.1 — Le **centre de gravité** G d'un triangle ABC est l'**isobarycentre** des trois sommets :

$$G = \text{bar}\{(A, 1); (B, 1); (C, 1)\}, \quad \text{i.e.} \quad \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

Propriété

Propriété 3.1 — Le centre de gravité G d'un triangle ABC est le point de concours des trois médianes, et il est situé aux $\frac{2}{3}$ de chaque médiane à partir du sommet.

3.3 Associativité du barycentre

Théorème

Théorème 3.2 — (**Associativité**) Soit $G = \text{bar}\{(A_1, \alpha_1); \dots; (A_n, \alpha_n)\}$ avec $\sum \alpha_i \neq 0$.

Si $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k \neq 0$ pour un certain $1 \leq k < n$, alors en notant $G_k = \text{bar}\{(A_1, \alpha_1); \dots; (A_k, \alpha_k)\}$ et $S_k = \alpha_1 + \dots + \alpha_k$, on a :

$$G = \text{bar}\{(G_k, S_k); (A_{k+1}, \alpha_{k+1}); \dots; (A_n, \alpha_n)\}.$$

Remarque

En pratique pour 3 points : si $G' = \text{bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ et $G = \text{bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$, alors $G = \text{bar}\{(G', \alpha + \beta); (C, \gamma)\}$.

Cela permet de construire un barycentre de trois points en deux étapes.

Exemple

Exemple 3.1 — Construire le point $G = \text{bar}\{(A, 1); (B, 2); (C, 3)\}$.

Solution. Posons $G_1 = \text{bar}\{(A, 1); (B, 2)\}$. Alors G_1 est sur $[AB]$ avec $\overrightarrow{AG_1} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

Par associativité, $G = \text{bar}\{(G_1, 3); (C, 3)\}$: c'est donc le *milieu* de $[G_1C]$ (isobarycentre normalisé : $3 = 3$).

4. Applications

4.1 Alignement de trois points

Méthode

Pour démontrer l'alignement de trois points A, B, C , on peut montrer que l'un d'eux est barycentre des deux autres avec certains poids.

Exemple

Exemple 4.1 — Soient ABC un triangle, J le milieu de $[AB]$ et K le milieu de $[AC]$. Montrer que J, K et le milieu I de $[BC]$ vérifient $\overrightarrow{JK} \parallel \overrightarrow{BC}$, et que (JK) et (BC) sont parallèles (théorème de la droite des milieux par barycentres).

Solution. Par associativité du barycentre, $J = \text{bar}\{(A, 1); (B, 1)\}$ et $K = \text{bar}\{(A, 1); (C, 1)\}$.

D'après la réduction, pour tout point M : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MJ}$ et $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MK}$.

En soustrayant : $\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = 2(\overrightarrow{MJ} - \overrightarrow{MK})$, soit $\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{KJ}$.

Donc $\overrightarrow{KJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$: les vecteurs $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires, et $JK = \frac{1}{2}BC$. $\square$

4.2 Lieu géométrique

Méthode

Pour déterminer un lieu géométrique défini par une relation vectorielle, on réduit cette relation en faisant apparaître un barycentre. Le lieu se présente alors souvent comme un cercle ou une droite.

Exemple

Exemple 4.2 — Soient A, B deux points fixes du plan. Déterminer l'ensemble des points M tels que $\|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\| = 5$.

Solution. Posons $G = \text{bar}\{(A, 1); (B, 3)\}$, donc $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, et la somme des poids vaut $4 \neq 0$.

D'après la réduction : $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = (1 + 3)\overrightarrow{MG} = 4\overrightarrow{MG}$.

Donc $\|4\overrightarrow{MG}\| = 5$, soit $4 \cdot MG = 5$, soit $MG = \frac{5}{4}$.

L'ensemble cherché est le **cercle de centre G et de rayon $\frac{5}{4}$** .

4.3 Concourance des droites

Méthode

Pour démontrer que trois droites sont concourantes, on peut souvent montrer qu'elles passent toutes par un même barycentre.

Exemple classique : dans un triangle, les médianes concourent au centre de gravité (isobarycentre des sommets) ; les bissectrices concourent au centre du cercle inscrit (barycentre des sommets pondérés par les côtés opposés).

5. Synthèse

5.1 Récapitulatif

Notion	Relation caractéristique
$G = \text{bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\} \ (\alpha + \beta \neq 0)$	$\alpha \vec{GA} + \beta \vec{GB} = \vec{0}$
Coordonnées de G	$\vec{OG} = \frac{\alpha \vec{OA} + \beta \vec{OB}}{\alpha + \beta}$
Réduction	$\alpha \vec{MA} + \beta \vec{MB} = (\alpha + \beta) \vec{MG}$
Cas $\alpha + \beta = 0$	$\alpha \vec{MA} + \beta \vec{MB} = \alpha \vec{BA}$ (vecteur constant)
Homogénéité	$G = \text{bar}\{(A, k\alpha); (B, k\beta)\}$ pour $k \neq 0$
Associativité (3 points)	$G = \text{bar}\{(G_2, \alpha + \beta); (C, \gamma)\}$ avec $G_2 = \text{bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$

5.2 Pièges classiques

Remarque

1. **Oublier la condition** $\alpha + \beta \neq 0$. Si la somme des poids est nulle, le barycentre n'existe pas (la relation donne un vecteur fixe).
2. **Confondre les vecteurs.** La relation est $\vec{GA}$ et non $\vec{AG}$; attention au signe.
3. **Mauvaise normalisation.** Lors de l'homogénéité, multiplier tous les coefficients (pas seulement certains).
4. **Associativité incomplète.** La somme partielle $\alpha_1 + \dots + \alpha_k$ doit être *non nulle* pour pouvoir appliquer l'associativité.

Fin du chapitre 5 – Barycentre dans le plan