

Table des matières

1	Barycentre de deux points pondérés	2
2	Barycentre de trois points pondérés	2
3	Barycentre de quatre points pondérés	4

1 Barycentre de deux points pondérés

Définition

Soient $(A; \alpha)$ et $(B; \beta)$ deux points pondérés tels que $\alpha + \beta \neq 0$.

- **Existence et unicité.** Il existe un unique point G vérifiant $\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \vec{0}$. Le point G est appelé **barycentre** du système $\{(A; \alpha), (B; \beta)\}$ et l'on note $G = \text{bar}\{(A; \alpha), (B; \beta)\}$.
- **Position de G .** $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \overrightarrow{BA}$. Si $A \neq B$, les points A , B et G sont alignés.

Propriété

Soient $(A; \alpha)$ et $(B; \beta)$ deux points pondérés tels que $\alpha + \beta \neq 0$.

- **Homogénéité.** Pour tout $k \in \mathbb{R}^*$: $\text{bar}\{(A; \alpha), (B; \beta)\} = \text{bar}\{(A; k\alpha), (B; k\beta)\}$.
- **Caractérisation.** Pour tout point M du plan :

$$\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta) \overrightarrow{MG}.$$

- **Coordonnées.** Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$:

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta}, \quad y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta}.$$

Exemple

Soient $A(2; -5)$ et $B(4; 3)$ deux points dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1 Déterminer α et β pour que $G = \text{bar}\{(A; \alpha), (B; \beta)\}$ vérifie $\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{AB}$.
- 2 Soit $G = \text{bar}\{(A; 3), (B; 6)\}$. Calculer les coordonnées de G .
- 3 Soit $G' = \text{bar}\{(A; -2), (B; 1)\}$. Calculer les coordonnées de G' .
- 4 Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = 6$.

Application

Soient A et B deux points distincts du plan.

- 1 Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\|3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = \|-2\overrightarrow{MA} + 6\overrightarrow{MB}\|.$$

- 2 Déterminer α et β pour que $G = \text{bar}\{(A; \alpha), (B; \beta)\}$ vérifie $-7\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = 10\overrightarrow{AB}$.

2 Barycentre de trois points pondérés

Définition

Soient $(A; \alpha)$, $(B; \beta)$ et $(C; \gamma)$ trois points pondérés tels que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$. Il existe un unique point G vérifiant :

$$\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} + \gamma \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

Le point G est appelé **barycentre** du système $\{(A; \alpha), (B; \beta), (C; \gamma)\}$.

Propriété

Avec les hypothèses précédentes :

- **Position.** $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{AC}$ (et formules analogues à partir de B et de C).
- **Homogénéité.** Pour tout $k \in \mathbb{R}^*$: $\text{bar}\{(A; \alpha), (B; \beta), (C; \gamma)\} = \text{bar}\{(A; k\alpha), (B; k\beta), (C; k\gamma)\}$.
- **Caractérisation.** Pour tout point M du plan :

$$\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma) \overrightarrow{MG}.$$

- **Coordonnées.** Dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$:

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma}, \quad y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma}.$$

- **Associativité.** Si $\alpha + \beta \neq 0$, en posant $H = \text{bar}\{(A; \alpha), (B; \beta)\}$, on a :

$$\text{bar}\{(A; \alpha), (B; \beta), (C; \gamma)\} = \text{bar}\{(H; \alpha + \beta), (C; \gamma)\}.$$

Exemple

Soient $A(1; 4)$, $B(0; 5)$ et $C(2; -1)$ trois points du plan dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1 Déterminer α , β et γ pour que $G = \text{bar}\{(A; \alpha), (B; \beta), (C; \gamma)\}$ vérifie $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.
- 2 Calculer les coordonnées du point $G' = \text{bar}\{(A; 2), (B; -3), (C; -6)\}$.
- 3 Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 4$.

Application

Soit ABC un triangle. Soit K le point défini par $\overrightarrow{BK} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{BC}$ et $G = \text{bar}\{(A; 3), (B; 7), (C; -4)\}$.

- 1 Vérifier que $K = \text{bar}\{(B; 7), (C; -4)\}$.
- 2 En déduire que G est le milieu du segment $[AK]$.

Exercice à la maison

ABC est un triangle. $G = \text{bar}\{(A; -2), (B; 3), (C; 3)\}$. Soient K et H tels que $\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH} = 3\overrightarrow{AC}$, et I le milieu de $[BC]$.

- 1 Vérifier que $K = \text{bar}\{(A; -2), (B; 3)\}$ et $H = \text{bar}\{(A; -2), (C; 3)\}$.
- 2 Montrer que $G = \text{bar}\{(K; 1), (C; 3)\}$, $G = \text{bar}\{(H; 1), (B; 3)\}$ et $G = \text{bar}\{(A; -1), (I; 3)\}$.
- 3 En déduire que les droites (CK) , (BH) et (AI) sont concourantes en un point que l'on déterminera.

3 Barycentre de quatre points pondérés

Définition

La définition, l'homogénéité, la caractérisation et l'associativité du barycentre de trois points pondérés se généralisent au barycentre de quatre points pondérés $(A; \alpha)$, $(B; \beta)$, $(C; \gamma)$ et $(D; \lambda)$, lorsque $\alpha + \beta + \gamma + \lambda \neq 0$.

Dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, ses coordonnées sont :

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C + \lambda x_D}{\alpha + \beta + \gamma + \lambda}, \quad y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C + \lambda y_D}{\alpha + \beta + \gamma + \lambda}.$$

Exemple

Construire le barycentre des points $(A; -1)$, $(B; 3)$, $(C; -1)$ et $(D; 2)$.

Application

Soient $A(0; 0)$, $B(4; 0)$, $C(4; 4)$ et $D(0; 4)$ les sommets d'un carré dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1 Calculer les coordonnées de $G = \text{bar}\{(A; 1), (B; 1), (C; 1), (D; 1)\}$.
- 2 Calculer les coordonnées de $G' = \text{bar}\{(A; 1), (B; 2), (C; 1), (D; 2)\}$.
- 3 Comparer les positions de G et G' par rapport au centre du carré.