

Série d'exercices — Calcul trigonométrique

1^{ère} BAC SX BIOF

En. Nidal SABI

Exercice 1

Calculer les valeurs exactes suivantes en utilisant les formules d'addition :

1. $\cos \frac{7\pi}{12}$.

3. $\cos \frac{11\pi}{12}$.

2. $\sin \frac{7\pi}{12}$.

4. $\sin \frac{11\pi}{12}$.

Exercice 2

Soient a, b deux réels tels que $0 < a < \frac{\pi}{2}$, $0 < b < \frac{\pi}{2}$ avec $\cos a = \frac{4}{5}$ et $\sin b = \frac{12}{13}$.
Calculer $\sin a$, $\cos b$, puis $\sin(a+b)$, $\cos(a+b)$, $\sin(a-b)$ et $\cos(a-b)$.

Exercice 3

Démontrer les identités suivantes pour tout $x \in \mathbb{R}$:

1. $\cos(3x) = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$.

2. $\sin(3x) = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$.

3. $1 + \cos x = 2 \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$.

Exercice 4

Soit x un réel. Linéariser les expressions suivantes :

1. $\cos^2 x \cdot \sin x$.

2. $\sin^2 x \cdot \cos^2 x$.

3. $\cos^4 x$.

Exercice 5

Transformer les sommes suivantes en produits :

1. $\sin(3x) + \sin x$.

3. $\sin \frac{7\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12}$.

2. $\cos(5x) - \cos(3x)$.

4. $\cos \frac{5\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12}$.

Exercice 6

Pour chaque expression, l'écrire sous la forme $r \cos(x - \alpha)$ avec $r > 0$ et $\alpha \in [-\pi, \pi]$:

1. $A(x) = \cos x - \sin x$.

3. $C(x) = -\cos x + \sqrt{3} \sin x$.

2. $B(x) = \sqrt{3} \cos x + \sin x$.

4. $D(x) = 2 \cos(2x) + 2\sqrt{3} \sin(2x)$.

Exercice 7

Résoudre dans $\mathbb{R}$, puis dans $[0, 2\pi]$, les équations suivantes :

1. $2 \cos x - 1 = 0$.

3. $\tan x = -1$.

2. $2 \sin x + \sqrt{3} = 0$.

4. $\cos(2x) = \frac{1}{2}$.

Exercice 8

Résoudre dans $[0, 2\pi]$ les inéquations suivantes :

1. $2 \cos x \geq 1$.

2. $\sqrt{2} \sin x < 1$.

3. $\cos x + \sqrt{3} \sin x \geq \sqrt{2}$.

Exercice 9

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x + \cos x$.

1. Écrire $f(x)$ sous la forme $r \sin(x + \alpha)$.

2. Déterminer le maximum et le minimum de f sur $\mathbb{R}$. Préciser les valeurs de x correspondantes.

3. Résoudre l'équation $f(x) = 1$ dans $[0, 2\pi]$.

Exercice 10

Soit $f(x) = \cos(2x) - 2 \sin x$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -2 \sin^2 x - 2 \sin x + 1$.

2. En posant $X = \sin x$, résoudre l'équation $f(x) = 0$ dans $[0, 2\pi]$.

Exercice 11

Soit a un réel tel que $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

1. Démontrer que $\tan(2a) = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$ (sous condition d'existence).

2. En déduire la valeur de $\tan \frac{\pi}{8}$.

Exercice 12

On pose $A = \cos \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7}$.

1. Calculer $\sin \frac{\pi}{7} \cdot A$ en utilisant la formule $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$.

2. En déduire la valeur exacte de A .