

Série d'exercices N°7

Calcul Trigonométrique

1^{ère} Année Baccalauréat – Sciences Mathématiques

Consignes. Toutes les résolutions doivent indiquer l'ensemble de résolution. Pour les inéquations, illustrer par un cercle trigonométrique.

Couverture. 14 exercices : calculs de valeurs, démonstrations d'identités, équations et inéquations trigonométriques.

I. Calculs et valeurs

Exercice 1 *Valeurs remarquables*

Calculer (sans calculatrice) en utilisant les formules d'addition :

1. $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.
2. $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.
3. $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
4. $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.

Exercice 2 *Réductions*

Calculer en utilisant les angles associés :

1. $\cos\left(\frac{15\pi}{4}\right)$, $\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right)$, $\tan\left(\frac{17\pi}{3}\right)$.
2. Simplifier $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin(\pi - x)$.
3. Exprimer $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$ en fonction de $\sin x$.

II. Démonstrations d'identités

Exercice 3 *Identités trigonométriques*

Démontrer les identités suivantes pour tout réel x (sauf restriction sur $\cos x$ ou $\sin x$ si nécessaire).

1. $\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$.
2. $\sin(3x) = 3\sin x - 4\sin^3 x$.
3. $\tan x + \cot x = \frac{2}{\sin(2x)}$ (pour $\sin x \cos x \neq 0$).
4. $\frac{1 - \cos(2x)}{\sin(2x)} = \tan x$ (pour $\sin x \cos x \neq 0$).
5. $\frac{\sin(2x)}{1 + \cos(2x)} = \tan x$ (pour $\cos x \neq -1$).

Exercice 4 *Identités par produit-somme*

1. Démontrer que $\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) + \cos(a + b)]$.
2. Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.
3. Calculer $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.
4. Démontrer que $\cos a + \cos\left(a + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(a - \frac{2\pi}{3}\right) = 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

III. Équations**Exercice 5** *Équations de base*

Résoudre dans $\mathbb{R}$, puis dans $[0, 2\pi[$:

1. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
2. $\sin x = -\frac{1}{2}$.
3. $\tan x = -1$.
4. $2 \cos x + 1 = 0$.
5. $\sin(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
6. $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$.

Exercice 6 *Équations du second degré*

Résoudre dans $\mathbb{R}$, puis dans $[0, 2\pi[$:

1. $2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0$.
2. $2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$.
3. $\cos(2x) + 3 \cos x + 2 = 0$.
4. $\sin(2x) = \sin x$.
5. $\cos(2x) = 1 - 2 \sin x$.

Exercice 7 *Équations linéaires en cos et sin*

Résoudre dans $\mathbb{R}$, puis dans $[0, 2\pi[$:

1. $\sqrt{3} \cos x + \sin x = 1$.
2. $\cos x - \sin x = \sqrt{2}$.
3. $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 1$.
4. $\cos x + \sin x = -1$.

Exercice 8 *Équations diverses*Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $\sin x = \cos x$.
2. $\sin(3x) = \sin x$.
3. $\cos(2x) + \cos x = 0$.
4. $\sin x + \sin(2x) + \sin(3x) = 0$.

IV. Inéquations**Exercice 9** *Inéquations de base*Résoudre dans $[0, 2\pi[$ (et représenter sur le cercle) :

1. $\cos x \geq \frac{1}{2}$.
2. $\sin x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
3. $\tan x \leq 1$.
4. $2 \cos x - \sqrt{3} > 0$.
5. $\sin x > \cos x$.

Exercice 10 *Inéquations avec composition*Résoudre dans $[0, 2\pi[$:

1. $\sin(2x) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.
2. $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{1}{2}$.
3. $\cos x + \sin x \geq 1$.

V. Problèmes de synthèse**Exercice 11** *Combinaison et linéarisation*Soit $f(x) = \cos^4 x + \sin^4 x$.

1. Montrer que $f(x) = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. En déduire que $f(x) = 1 - \frac{1}{2} \sin^2(2x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos(4x)$.
3. Déterminer le maximum et le minimum de f sur $\mathbb{R}$, et les valeurs de x correspondantes.

Exercice 12 *Étude complète d'une fonction trigonométrique*Soit $g(x) = \sin x + \cos x$.

1. Montrer que $g(x) = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.
2. Déterminer la période, le maximum, le minimum de g .

3. Résoudre $g(x) = 1$, $g(x) > 0$, $g(x) = -\sqrt{2}$ dans $[0, 2\pi[$.

Fin de la série – Calcul Trigonométrique