

Calcul Trigonométrie

1^{ère} Année Baccalauréat – Sciences Mathématiques

Volume horaire officiel : 9h (cf. répartition 2013) – **Pré-requis** : trigonométrie du tronc commun (cercle, cos, sin, tan), valeurs remarquables, équations du second degré.

Capacités attendues : maîtriser les différentes formules de transformation ; résoudre des équations et inéquations trigonométriques se ramenant aux équations et inéquations de base ; représenter et lire les solutions d'une équation ou inéquation trigonométrique sur le cercle.

Table des matières

1	Rappels et cercle trigonométrique	2
1.1	Mesure d'un angle	2
1.2	Cercle trigonométrique et angles orientés	2
1.3	Définitions de cos, sin, tan	2
1.4	Propriétés fondamentales	2
1.5	Valeurs remarquables	3
1.6	Angles associés	3
2	Formules d'addition et de duplication	4
2.1	Formules d'addition	4
2.2	Formules de duplication (angle double)	4
2.3	Formules de linéarisation	5
2.4	Formules de transformation produit $\leftrightarrow$ somme	5
3	Équations trigonométriques	6
3.1	Équations de base	6
3.2	Équations $a \cos x + b \sin x = c$	6
3.3	Équations se ramenant au second degré	7
4	Inéquations trigonométriques	8
4.1	Méthode du cercle	8
5	Synthèse	9
5.1	Formules essentielles	9
5.2	Équations de base	9
5.3	Pièges classiques	9

1. Rappels et cercle trigonométrique

1.1 Mesure d'un angle

Définition

Définition 1.1 — Le **radian** (rad) est l'unité d'angle telle que $180^\circ = \pi$ rad. Conversion :

$$\alpha (\text{deg}) \rightarrow \alpha \cdot \frac{\pi}{180} (\text{rad}) \quad ; \quad \alpha (\text{rad}) \rightarrow \alpha \cdot \frac{180}{\pi} (\text{deg}).$$

Exemple

Exemple 1.1 — $30^\circ = \frac{\pi}{6}$ rad ; $45^\circ = \frac{\pi}{4}$; $60^\circ = \frac{\pi}{3}$; $90^\circ = \frac{\pi}{2}$.

1.2 Cercle trigonométrique et angles orientés

Définition

Définition 1.2 — Le **cercle trigonométrique** $\mathcal{C}$ est le cercle de centre O et rayon 1 dans un repère orthonormé direct.

Tout réel $x \in \mathbb{R}$ est associé à un unique point M de $\mathcal{C}$: M est le point tel que la mesure (en radian, comptée dans le sens trigonométrique) de l'arc $\widehat{AM}$ (avec $A(1,0)$) vaut $x \bmod 2\pi$. On dit que M est l'**image** de x sur $\mathcal{C}$.

1.3 Définitions de cos, sin, tan

Définition

Définition 1.3 — Si M est l'image de x sur le cercle trigonométrique, ses coordonnées sont $M(\cos x, \sin x)$.

La **tangente** de x est définie pour $\cos x \neq 0$ par :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

La **cotangente** est $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ (pour $\sin x \neq 0$).

1.4 Propriétés fondamentales

Propriété

Propriété 1.1 — Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad ; \quad -1 \leq \cos x \leq 1 \quad ; \quad -1 \leq \sin x \leq 1.$$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x \quad ; \quad \sin(x + 2\pi) = \sin x \quad ; \quad \tan(x + \pi) = \tan x \text{ (si défini)}.$$

$$\cos(-x) = \cos x \quad ; \quad \sin(-x) = -\sin x \quad ; \quad \tan(-x) = -\tan x.$$

1.5 Valeurs remarquables

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	non définie

1.6 Angles associés

Propriété

Propriété 1.2 — (Symétries du cercle) Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos(\pi - x) = -\cos x ; \quad \sin(\pi - x) = \sin x$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos x ; \quad \sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x ; \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x ; \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

2. Formules d'addition et de duplication

2.1 Formules d'addition

Théorème

Théorème 2.1 — Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

Propriété

Propriété 2.1 — Pour les tangentes (quand toutes les expressions sont définies) :

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \quad ; \quad \tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}.$$

Exemple

Exemple 2.1 — Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Solution. $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, donc

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}.$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

2.2 Formules de duplication (angle double)

Théorème

Théorème 2.2 — Pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$$

$$\tan(2a) = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a} \quad (\text{si défini})$$

Démonstration

On applique les formules d'addition avec $b = a$: par exemple $\cos(2a) = \cos(a + a) = \cos^2 a - \sin^2 a$.
Les deux autres formes viennent de $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$. □

2.3 Formules de linéarisation

Propriété

Propriété 2.2 — Pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos(2a)}{2} \quad ; \quad \sin^2 a = \frac{1 - \cos(2a)}{2} \quad ; \quad \sin a \cos a = \frac{\sin(2a)}{2}.$$

2.4 Formules de transformation produit $\leftrightarrow$ somme

Propriété

Propriété 2.3 — (Produit en somme)

$$\cos p \cos q = \frac{1}{2} [\cos(p - q) + \cos(p + q)]$$

$$\sin p \sin q = \frac{1}{2} [\cos(p - q) - \cos(p + q)]$$

$$\sin p \cos q = \frac{1}{2} [\sin(p + q) + \sin(p - q)]$$

(Somme en produit) On pose $p = \frac{a+b}{2}$, $q = \frac{a-b}{2}$:

$$\cos a + \cos b = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\cos a - \cos b = -2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\sin a + \sin b = 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\sin a - \sin b = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

3. Équations trigonométriques

3.1 Équations de base

Théorème

Théorème 3.1 — Soient $\alpha, x \in \mathbb{R}$.

- $\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = -\alpha + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
- $\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = \pi - \alpha + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
- $\tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Exemple

Exemple 3.1 — Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\cos x = \frac{1}{2}$.

Solution. $\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Donc :

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Exemple

Exemple 3.2 — Résoudre dans $[0, 2\pi[$: $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Solution. $-\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$. Donc :

$$x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \pi + \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Dans $[0, 2\pi[$: $x = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$ et $x = \frac{5\pi}{4}$.

3.2 Équations $a \cos x + b \sin x = c$

Méthode

Pour résoudre $a \cos x + b \sin x = c$ (avec a, b non tous deux nuls) :

1. Calculer $R = \sqrt{a^2 + b^2}$ et chercher φ tel que $\cos \varphi = \frac{a}{R}$, $\sin \varphi = \frac{b}{R}$.
2. Réécrire : $a \cos x + b \sin x = R \cos(x - \varphi)$.
3. Résoudre $\cos(x - \varphi) = \frac{c}{R}$.

Condition de solution : $|c| \leq R$.

Exemple

Exemple 3.3 — Résoudre $\cos x + \sqrt{3} \sin x = 1$.

Solution. $R = \sqrt{1 + 3} = 2$. On cherche φ avec $\cos \varphi = \frac{1}{2}$, $\sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$: $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

L'équation devient : $2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$, soit $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

D'où : $x - \frac{\pi}{3} = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, soit $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

3.3 Équations se ramenant au second degré

Méthode

Pour des équations comme $2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 = 0$, poser $u = \cos x$ (avec $u \in [-1, 1]$), résoudre l'équation du second degré en u , puis revenir à x .

Exemple

Exemple 3.4 — Résoudre $2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 = 0$.

Solution. Poser $u = \cos x \in [-1, 1]$. L'équation $2u^2 + 3u - 2 = 0$ a pour solutions $u = \frac{1}{2}$ ou $u = -2$. Or $-2 \notin [-1, 1]$, donc $u = \frac{1}{2}$, soit $\cos x = \frac{1}{2} : x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$.

4. Inéquations trigonométriques

4.1 Méthode du cercle

Méthode

Pour résoudre une inéquation trigonométrique comme $\cos x \leq k$, $\sin x \geq k$, etc., on procède *graphiquement* sur le cercle trigonométrique :

1. Tracer le cercle trigonométrique.
2. Tracer la droite $y = k$ (pour $\sin$) ou $x = k$ (pour $\cos$).
3. Identifier l'arc du cercle correspondant à la condition.
4. Lire les bornes de l'arc en termes d'angle.

Exemple

Exemple 4.1 — Résoudre dans $[0, 2\pi[: \cos x \leq \frac{1}{2}$.

Solution. $\cos x = \frac{1}{2}$ pour $x = \frac{\pi}{3}$ et $x = \frac{5\pi}{3}$. L'inéquation $\cos x \leq \frac{1}{2}$ correspond à l'arc à gauche de la droite verticale $x = \frac{1}{2}$. Donc :

$$x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right].$$

Exemple

Exemple 4.2 — Résoudre dans $\mathbb{R} : \sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Solution. $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ pour $x = \frac{\pi}{4}$ et $x = \frac{3\pi}{4}$ (sur $[0, 2\pi[$). L'inéquation correspond à $x \in \left] \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right[$. Avec la périodicité 2π :

$$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \right[.$$

5. Synthèse

5.1 Formules essentielles

Identité	Formule
Pythagore	$\cos^2 a + \sin^2 a = 1$
Addition cos	$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$
Addition sin	$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$
Duplication	$\cos(2a) = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$; $\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$
Linéarisation	$\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$; $\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$
Produit-somme cos	$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$
Produit-somme sin	$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$

5.2 Équations de base

Équation	Solutions ($k \in \mathbb{Z}$)
$\cos x = \cos \alpha$	$x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = -\alpha + 2k\pi$
$\sin x = \sin \alpha$	$x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = \pi - \alpha + 2k\pi$
$\tan x = \tan \alpha$	$x = \alpha + k\pi$
$\cos x = 0$	$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$
$\sin x = 0$	$x = k\pi$
$\cos x = 1$	$x = 2k\pi$
$\cos x = -1$	$x = \pi + 2k\pi$

5.3 Pièges classiques

Remarque

1. **Oublier $k\pi$ ou $2k\pi$.** Les équations trigonométriques ont une *infinité* de solutions.
2. **Confondre $\sin(-x)$ et $\cos(-x)$.** $\sin$ est impair ($\sin(-x) = -\sin x$), $\cos$ est pair ($\cos(-x) = \cos x$).
3. **Condition $|c| \leq R$ pour $a \cos x + b \sin x = c$.** Sinon, pas de solution.
4. **Oublier de vérifier $u \in [-1, 1]$.** Quand on pose $u = \cos x$ ou $u = \sin x$ dans une équation polynomiale.
5. **Confondre solutions dans $[0, 2\pi[$ et dans $\mathbb{R}$.** Bien préciser l'ensemble de résolution.