

Table des matières

1	Formules d'addition, de duplication et de linéarisation	2
2	Transformations produit-somme et somme-produit	3
3	Transformation de $a \cos x + b \sin x$	3
4	Équations et inéquations trigonométriques	4

1 Formules d'addition, de duplication et de linéarisation

Propriété

Soient $a, b, x \in \mathbb{R}$.

- **Addition.**

$$\rightarrow \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\rightarrow \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\rightarrow \sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\rightarrow \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

- **Pour la tangente**, sous réserve d'existence :

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}, \quad \tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}.$$

- **Duplication.**

$$\rightarrow \cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\rightarrow \cos(2a) = 2 \cos^2 a - 1$$

$$\rightarrow \cos(2a) = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\rightarrow \sin(2a) = 2 \sin a \cos a$$

- **Linéarisation.**

$$\rightarrow \cos^2 a = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$$

$$\rightarrow \sin^2 a = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$$

Exemple

1 Sachant que $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, calculer $\cos \frac{5\pi}{12}$, $\sin \frac{5\pi}{12}$, $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

2 Sachant que $\frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\pi}{8}$, calculer $\cos \frac{\pi}{8}$, $\sin \frac{\pi}{8}$ et $\tan \frac{\pi}{8}$.

3 Soit x un réel tel que $x \neq k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que $\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

Application

1 Soient a et b deux réels tels que $0 < a < \frac{\pi}{2}$, $0 < b < \frac{\pi}{2}$ et $\sin a = \cos b = \frac{1}{3}$. Déterminer $a + b$.

2 Soit x un réel tel que $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Simplifier l'expression $\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \times \tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$.

2 Transformations produit-somme et somme-produit

Propriété

Soient a, b, x, y des réels.

- **Produit en somme.**

$$\rightarrow \sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$\rightarrow \cos a \sin b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) - \sin(a-b)]$$

$$\rightarrow \cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\rightarrow \sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

- **Somme en produit** (en posant $a = \frac{x+y}{2}$, $b = \frac{x-y}{2}$).

$$\rightarrow \sin x + \sin y = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\rightarrow \sin x - \sin y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\rightarrow \cos x + \cos y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\rightarrow \cos x - \cos y = -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

Exemple

1 Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

2 Soit x un réel. Montrer que $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \cos(2x) - \frac{1}{4}$.

3 Montrer que $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

4 Soit x un réel. Montrer que $\cos(6x) - \cos(2x) = -4 \sin^2(2x) \cos(2x)$.

Application

Soit $A = \frac{\cos \frac{\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12}}{\cos \frac{\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12}}$.

1 Montrer que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{3}$ et $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{6}$.

2 En déduire la valeur de A .

3 Montrer que $A = \frac{1 + \tan \frac{\pi}{12}}{1 - \tan \frac{\pi}{12}}$, puis en déduire $\tan \frac{\pi}{12}$.

3 Transformation de $a \cos x + b \sin x$

Propriété

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \alpha),$$

où α est l'unique réel (modulo 2π) vérifiant $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Exemple

Écrire sous la forme $r \cos(x - \alpha)$ les expressions suivantes :

- $A(x) = \cos x + \sin x$
- $B(x) = \sqrt{3} \cos x - \sin x$
- $C(x) = \sqrt{3} \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

Application

Écrire $D(x) = \cos x - \sqrt{3} \sin x$ sous la forme $r \cos(x - \alpha)$, puis déterminer la valeur maximale et la valeur minimale de $D(x)$ sur $\mathbb{R}$.

4 Équations et inéquations trigonométriques

Propriété

Soient $x, \alpha \in \mathbb{R}$.

- $\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) : x = \alpha + 2k\pi \text{ ou } x = -\alpha + 2k\pi.$
- $\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) : x = \alpha + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \alpha + 2k\pi.$
- $\tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) : x = \alpha + k\pi.$

Exemple

Résoudre dans l'intervalle I les équations et inéquations suivantes :

- 1 $2 \cos x - \sqrt{3} = 0$ sur $I = [-\pi, 2\pi]$.
- 2 $\sqrt{2} \sin x + 1 = 0$ sur $I = [0, 2\pi]$.
- 3 $\tan x = \sqrt{3}$ sur $I = [-\pi, \pi]$.
- 4 $\sqrt{3} \cos x - \sin x = \sqrt{2}$ sur $I = [-\pi, \pi]$.
- 5 $\sqrt{3} \cos x - \sin x > \sqrt{2}$ sur $I = \left[-\pi, \frac{\pi}{2}\right]$.

Application

Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $A(x) = 2\sqrt{3} \sin^2 x - \sin(2x) - \sqrt{3} \sin x + \cos x$.

- 1 Calculer $A\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et $A\left(\frac{\pi}{3}\right)$.
- 2 Montrer que $A(x) = 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) (1 - 2 \sin x)$.
- 3 Résoudre dans $\mathbb{R}$, puis dans $]0, 2\pi]$, l'équation $A(x) = 0$.
- 4 Résoudre dans $]0, 2\pi]$ l'inéquation $A(x) > 0$.