

Exercice n°1

Soient A, B, C, D des points du plan. Simplifier les vecteurs suivants en utilisant la relation de Chasles :

$$\vec{U} = \vec{AB} - \vec{CB} + \vec{DC} + \vec{AD},$$

$$\vec{V} = \vec{AB} - \vec{DB} + \vec{DC} - \vec{AC},$$

$$\vec{W} = 2\vec{AB} - 3\vec{AC} + \vec{BC}.$$

Exercice n°2

Soient A, B, C trois points du plan non alignés. On définit le point D par :

$$\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{AC}.$$

1. Faire une figure.
2. Montrer que $ABDC$ est un parallélogramme.
3. Soit M le milieu de $[BC]$. Montrer que M est aussi le milieu de $[AD]$.

Exercice n°3

Soit ABC un triangle. On considère les points M et N définis par :

$$\vec{AM} = \frac{1}{3}\vec{AB} \quad \text{et} \quad \vec{AN} = \frac{1}{3}\vec{AC}.$$

1. Montrer que $\vec{MN} = \frac{1}{3}\vec{BC}$.
2. En déduire que les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

Exercice n°4

Soit ABC un triangle, et soient I et J les points définis par :

$$\vec{AI} = \frac{1}{3}\vec{AB} \quad \text{et} \quad \vec{AJ} = \frac{1}{3}\vec{AC}.$$

On note K le milieu de $[IJ]$ et G le centre de gravité du triangle ABC .

1. Exprimer $\vec{AK}$ en fonction de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.
2. Exprimer $\vec{AG}$ en fonction de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.
3. En déduire que les points A, K et G sont alignés.

Exercice n°5

Soit $ABCD$ un parallélogramme. Soient I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[DC]$.

1. Faire une figure.
2. Exprimer $\vec{AJ}$ et $\vec{IC}$ en fonction de $\vec{AB}$ et $\vec{AD}$.
3. En déduire que les droites (AJ) et (IC) sont parallèles.

Exercice n°6

Soit $ABCD$ un parallélogramme et O son centre (point d'intersection des diagonales).

1. Justifier que O est le milieu commun de $[AC]$ et de $[BD]$.
2. Montrer que pour tout point M du plan :

$$\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = 4\vec{MO}.$$

Exercice n°7

Soit ABC un triangle, et soient A', B', C' les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[AC]$, $[AB]$.

1. Exprimer $\vec{AA'}$ et $\vec{BB'}$ en fonction de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.
2. Calculer $\vec{A'B'}$ et $\vec{A'C'}$ en fonction de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.
3. Soit G le centre de gravité de ABC et G' le centre de gravité de $A'B'C'$. Montrer que $G = G'$.

Exercice n°8

Soit OAB un triangle. Le point M est défini par :

$$\vec{OM} = \frac{1}{4}\vec{OA} + \frac{3}{4}\vec{OB}.$$

1. Exprimer $\vec{AM}$ en fonction de $\vec{AB}$.
2. En déduire la position du point M par rapport au segment $[AB]$.

Exercice n°9

Soit $ABCD$ un quadrilatère quelconque, et soient P, Q, R, S les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

1. Faire une figure.
2. En considérant le triangle ABC , montrer que $\vec{PQ} = \frac{1}{2}\vec{AC}$.
3. De la même façon, montrer que $\vec{SR} = \frac{1}{2}\vec{AC}$.
4. En déduire que $PQRS$ est un parallélogramme.

Ce résultat est connu sous le nom de **théorème de Varignon**.