

Table des matières

1	Notion de vecteur	1	2.1	Relation de Chasles	3
1.1	Définition	1	2.2	Règle du parallélogramme	3
1.2	Égalité et opposition	2	3	Multiplication d'un vecteur par un réel	4
2	Somme de deux vecteurs	3	3.1	Construire une combinaison linéaire	4
			4	Colinéarité de deux vecteurs	5
			5	Milieu d'un segment	5
			6	Centre de gravité d'un triangle	6

1 Notion de vecteur

1.1 Définition

DÉFINITION

Soient A et B deux points distincts du plan (P) .

Le **vecteur** $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par trois données :

- Une **direction** : celle de la droite (AB) .
- Un **sens** : de A vers B .
- Une **norme** (ou longueur) : $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$.

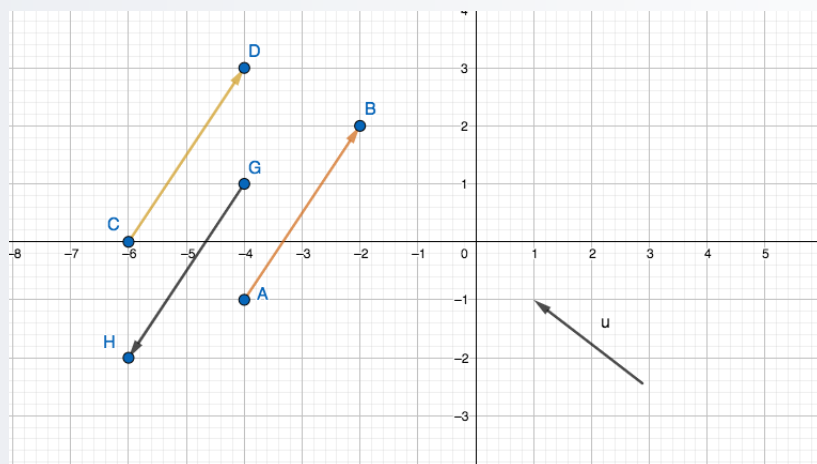
A est l'*origine* et B l'*extrémité* du vecteur.

DÉFINITION

Le **vecteur nul**, noté $\vec{0}$, est défini par $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ pour tout point A . Il n'a ni direction ni sens, et sa norme est nulle.

EXEMPLE

Sur la figure, relever des vecteurs égaux, opposés et de même direction. Justifier chaque réponse géométriquement.



1.2 Égalité et opposition

DÉFINITION

Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont :

- **égaux**, si et seulement s'ils ont même direction, même sens et même norme. On écrit $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
- **opposés**, si et seulement s'ils ont même direction, même norme et des sens opposés. On écrit $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$.

En particulier, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont opposés : $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

PROPRIÉTÉ 1

Soient A, B, C, D quatre points du plan deux à deux distincts. Les énoncés suivants sont **équivalents** :

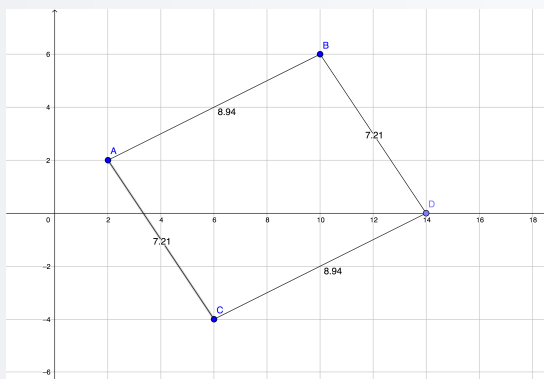
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
- $ABCD$ est un parallélogramme.
- Les segments $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu.

PROPRIÉTÉ

Pour tout vecteur $\vec{u}$ et tout point A du plan, il existe un *unique* point M tel que $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$.

EXEMPLE

À partir du parallélogramme $ABDC$, comparer $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$, puis $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{CA}$.



EXERCICE

Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O .

- 1 Donner un vecteur égal à $\overrightarrow{AB}$.
- 2 Donner le vecteur opposé de $\overrightarrow{AD}$.
- 3 Simplifier $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}$, puis exprimer le résultat en fonction de $\overrightarrow{AO}$.

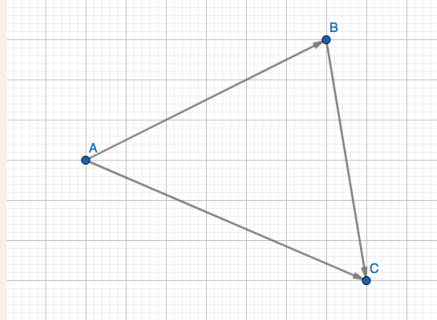
2 Somme de deux vecteurs

2.1 Relation de Chasles

THÉORÈME 1

Relation de Chasles. Pour tous points A, B, C du plan :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$



REMARQUE

Cas particulier : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$, donc $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

EXEMPLE

Simplifier, à l'aide de la relation de Chasles,

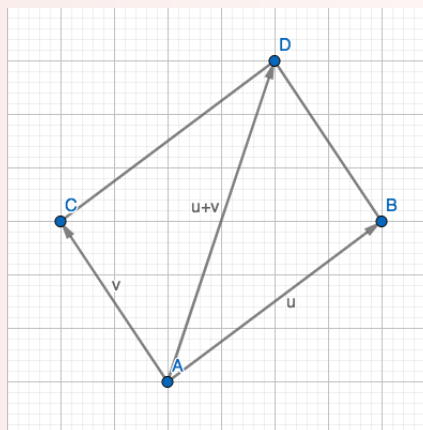
$$\vec{U} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB}, \quad \vec{V} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{FA}.$$

2.2 Règle du parallélogramme

THÉORÈME

Soient A, B, C, D des points du plan. Les énoncés suivants sont **équivalents** :

- $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
- $ABDC$ est un parallélogramme.
- Les segments $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu.



EXERCICE

Soient A, B, C trois points du plan non alignés. On considère deux points D et E vérifiant :

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}.$$

- 1 Faire une figure.
- 2 Déterminer la nature du quadrilatère $EACB$.

3 Multiplication d'un vecteur par un réel

DÉFINITION

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul du plan et k un réel non nul. Le **produit du vecteur $\vec{u}$ par k** est le vecteur $k\vec{u}$ tel que :

- $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont la **même direction**.
- $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont le *même sens* si $k > 0$, des *sens opposés* si $k < 0$.
- $\|k\vec{u}\| = |k| \cdot \|\vec{u}\|$.

REMARQUE

- $k \cdot \vec{0} = \vec{0}$; $0 \cdot \vec{u} = \vec{0}$; $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$; $(-1) \cdot \vec{u} = -\vec{u}$.
- $k\vec{u} = \vec{0} \iff (k = 0 \text{ ou } \vec{u} = \vec{0})$.

PROPRIÉTÉ 2

Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ du plan et tous réels a, b :

$$\begin{aligned} a(\vec{u} + \vec{v}) &= a\vec{u} + a\vec{v}, & (a+b)\vec{u} &= a\vec{u} + b\vec{u}, \\ a(b\vec{u}) &= (ab)\vec{u}, & a(\vec{u} - \vec{v}) &= a\vec{u} - a\vec{v}, \\ (a-b)\vec{u} &= a\vec{u} - b\vec{u}. \end{aligned}$$

EXEMPLE

Simplifier

$$\vec{U} = 2(\vec{u} + \vec{v}) - 4\left(\frac{1}{2}\vec{u} - \vec{v}\right), \quad \vec{V} = \frac{1}{3}(3\vec{u} - 9\vec{v}) + \frac{1}{2}(2\vec{u} + 6\vec{v} - 2\vec{u}).$$

EXERCICE

Soit ABC un triangle, $\vec{i} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{AC}$. Construire le vecteur $3\vec{i} - 2\vec{j}$.

3.1 Construire une combinaison linéaire

PROPRIÉTÉ

Pour construire $a\vec{u} + b\vec{v}$, on construit d'abord des représentants de $a\vec{u}$ et $b\vec{v}$, puis on les additionne par la règle du parallélogramme ou par mise bout à bout. Le signe fixe le sens et la valeur absolue fixe la longueur.

4 Colinéarité de deux vecteurs

DÉFINITION

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement s'il existe un réel k tel que :

$$\vec{u} = k\vec{v} \quad \text{ou} \quad \vec{v} = k\vec{u}.$$

REMARQUE

- Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.
- Deux vecteurs non nuls sont colinéaires si et seulement s'ils ont la même direction.

PROPRIÉTÉ 3

- Soient A, B, C trois points tels que $A \neq C$. Ils sont **alignés** si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.
- Soit (AB) une droite. Un point M appartient à (AB) si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.
- Deux droites (AB) et (CD) sont **parallèles** si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

EXEMPLE

Dans un triangle ABC , les points E et F vérifient $\overrightarrow{AF} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$. Montrer que E, F et B sont alignés.

EXERCICE

Soit ABC un triangle, E et F tels que $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$.

- 1 Faire une figure.
- 2 Écrire $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{BF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
- 3 Montrer que les droites (EC) et (BF) sont parallèles.

5 Milieu d'un segment

PROPRIÉTÉ 4

Soient A, B, I trois points du plan. Les énoncés suivants sont **équivalents** :

- I est le milieu du segment $[AB]$.
- $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.
- $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
- $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

PROPRIÉTÉ

Si I est le milieu du segment $[AB]$, alors pour tout point M du plan :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}.$$

EXERCICE

Soit ABC un triangle, et E, F tels que :

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}.$$

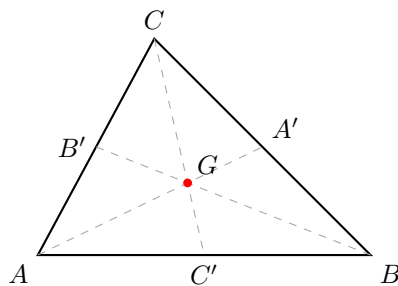
Montrer que C est le milieu du segment $[EF]$.

6 Centre de gravité d'un triangle

DÉFINITION 1

Soit ABC un triangle. Une **médiane** de ABC est un segment reliant un sommet au milieu du côté opposé.

Les trois médianes d'un triangle sont **concurrentes** en un point appelé **centre de gravité** (ou *isobarycentre*) du triangle, généralement noté G .



THÉORÈME 2

Soit ABC un triangle, et soit G un point du plan. Les énoncés suivants sont **équivalents** :

- 1 G est le centre de gravité du triangle ABC .
- 2 $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
- 3 $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.
- 4 Si A' est le milieu de $[BC]$, alors $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$.

PROPRIÉTÉ

Si G est le centre de gravité du triangle ABC , alors pour tout point M :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}.$$

EXERCICE

Soit ABC un triangle, G son centre de gravité et A' le milieu de $[BC]$.

- 1 Montrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$.
- 2 En déduire que G est situé sur la médiane issue de A , aux deux tiers à partir de A .

EXERCICE

Soit ABC un triangle, et soient les points E, F, H définis par :

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}.$$

- 1 Montrer que les triangles ABC et EFH ont le même centre de gravité.
-