

Série d'exercices — Chapitre 1 : La continuité

2^e BAC SX BIOF

En. Nidal SABI

Exercice 1 — Calcul de limites

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \sqrt{x^2 + 2x}}{x}$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x$

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 + 1} + x$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin(2x)}{2x + \sin(x)}$

5. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{3 - x}$

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x}$

7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{27x^3 + x + 1}}{\sqrt[4]{16x^4 + 1}}$

8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}(\sqrt{x} - 1)^2$

Exercice 2 — Racines n -ièmes et puissances rationnelles

1. Classer par ordre croissant : $\sqrt[3]{4}$, $3^{1/4}$, $\sqrt{2}$.

2. On pose $A = \frac{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[6]{32}}{2 \sqrt[3]{\sqrt{2}}}$. Montrer que $A = 1$.

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

(a) $(2 - x)^3 = 27$

(b) $x^8 + 2x^4 - 3 = 0$

(c) $\sqrt[3]{x+1} < 1$

(d) $1 - x^3 > 0$

Exercice 3 — TVI et dichotomie

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3(x - 1)(x + 1)$.

2. Étudier les variations de f et dresser son tableau.

3. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

4. Déterminer $f([-1; 1])$ et $f(]-1; +\infty[)$.

5. Montrer que l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution $\alpha \in]-\infty; -1[$, puis vérifier que $-3 < \alpha < -1$.

6. Donner un encadrement de α d'amplitude 0,5 par dichotomie.

Exercice 4 — Étude complète + dichotomie

Soit u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^3 - x^2 + 3x + 1$.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)$.

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{8}{3}$, puis dresser le tableau de variations.

3. En déduire que l'équation $u(x) = 0$ admet une et une seule solution $\alpha \in \mathbb{R}$.

4. Vérifier que $-1 < \alpha < 0$.

5. Par dichotomie, donner un encadrement de α d'amplitude $\frac{1}{8}$.

6. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(x + 1)u(x) > 0$.

Exercice 5 — Comparaison et limites

Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 + \frac{x^2}{2 + \sin x}$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geq \frac{x^2 + 3}{3}$.
2. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$.
3. Interpréter géométriquement le résultat de la question 2.

Exercice 6 — Fonction réciproque (rationnelle)

Soit f définie sur $I =]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x+1}{x^2}$.

1. Montrer que f est continue sur I .
2. Montrer que f est strictement décroissante sur I .
3. En déduire $f(I)$.
4. Justifier que f admet une fonction réciproque f^{-1} sur un intervalle J à préciser.
5. Calculer $f^{-1}(2)$.
6. Déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

Exercice 7 — Fonction réciproque (avec racine)

Soit f définie sur $I = [1; +\infty[$ par $f(x) = 2x - 4\sqrt{x} + 1$.

1. Montrer que f est continue sur I .
2. Montrer que pour tout $x \in I$, $f'(x) = \frac{2(\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x}}$. En déduire la monotonie de f .
3. Justifier que f admet une réciproque f^{-1} sur un intervalle K à déterminer.
4. Pour tout $x \in K$, déterminer $f^{-1}(x)$.

Exercice 8 — Continuité par morceaux et détermination de paramètre

Soit f définie par $f(x) = \frac{1 - \sqrt{x}}{x^2 + x - 2}$.

1. Résoudre $x^2 + x - 2 = 0$ et en déduire $D_f = [0; 1[\cup]1; +\infty[$.
2. Montrer que pour tout $x \in D_f$, $f(x) = \frac{-1}{(x+2)(1+\sqrt{x})}$.
3. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.
4. Soit g définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in]1; +\infty[\\ 2mx + \frac{5}{6} & \text{si } x \in [0; 1] \end{cases}, \quad m \in \mathbb{R}^*.$$

- (a) Montrer que g est continue sur $]1; +\infty[$.
- (b) Déterminer m pour que g soit continue en 1.

Exercice 9 — Prolongement par continuité

Soit f définie par $f(x) = \frac{2\sqrt{x} - 2}{x^2 - 3x + 2}$.

1. Résoudre $x^2 - 3x + 2 = 0$ et en déduire D_f .

2. Montrer que pour tout $x \in D_f$, $f(x) = \frac{2}{(\sqrt{x} + 1)(x - 2)}$.
3. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$.
4. Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.
5. Soit g définie par $g(x) = f(x)$ si $x \in D_f$ et $g(1) = -1$. Montrer que g est continue en 1.

Exercice 10 — Synthèse : réciproque et équation

Soit g définie sur $I = [0; +\infty[$ par $g(x) = x + 2\sqrt{x}$.

1. Montrer que g est continue et strictement croissante sur I .
2. En déduire que g admet une réciproque g^{-1} définie sur I .
3. Vérifier que $g^{-1}(0) = 0$.
4. Montrer que pour tout $x \in I$, $g^{-1}(x) = (\sqrt{x+1} - 1)^2$.
5. Résoudre dans I l'équation $g^{-1}(x) = g(x)$.