

Table des matières

1	Continuité en un point	2
1.1	Continuité à droite et à gauche	2
2	Continuité sur un intervalle	3
2.1	Continuité des fonctions usuelles	3
2.2	Opérations sur les fonctions continues	3
	Continuité de la composée	3
3	Image d'un intervalle par une fonction continue	4
3.1	Cas d'une fonction continue strictement monotone	4
4	Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)	5
5	Méthode de la dichotomie	6
6	Fonction réciproque	7
7	Fonction racine n -ième	8
7.1	Limites avec la racine n -ième	9
8	Puissance rationnelle d'un réel strictement positif	9

1 Continuité en un point

Activité

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1, \\ 2 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ puis comparer avec $f(1)$.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$. On dit que f est **continue en** x_0 si :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Exemple

« Continuité par calcul de limite. »

Soit h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x \sin x$ si $x \neq 0$ et $h(0) = 0$. Étudier la continuité de h en 0.

Solution. $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin x = 0 = h(0)$, donc h est continue en 0.

1.1 Continuité à droite et à gauche

Définition

- f est *continue à droite* en x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$.
- f est *continue à gauche* en x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Proposition

Soit f définie sur un voisinage de x_0 .

$$f \text{ continue en } x_0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

Exemple

« Recouvrement à gauche / à droite. »

Soit $f(x) = x^2$ si $x \leq 0$ et $f(x) = 2 + x$ si $x > 0$. Étudier la continuité de f en 0.

Solution. À gauche : $\lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 = 0 = f(0)$, donc f est continue à gauche en 0. À droite : $\lim_{x \rightarrow 0^+} (2 + x) = 2 \neq f(0)$, donc f n'est pas continue à droite en 0. Conclusion : f n'est pas continue en 0.

Application

Soit $f(x) = \frac{2x+1}{7-3x}$ si $x \leq 2$ et $f(x) = \frac{x^2+x-6}{x-2}$ si $x > 2$.

- Étudier la continuité de f en 2 à gauche, à droite.
- Conclusion : f est-elle continue en 2 ?

À faire à la maison

- 1 Soit $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = a$. Déterminer a pour que f soit continue en 0.
- 2 Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$ et h définie par : $h(x) = ax + 5b - a$ si $x > 0$; $h(x) = \frac{\sin(ax)}{bx}$ si $x < 0$; $h(0) = 4$. Déterminer a, b pour que h soit continue en 0.
- 3 Soit $f(x) = \frac{\cos(x) - x \sin(3x) - 1}{x^2}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = -\frac{7}{2}$. Démontrer la continuité de f en 0.

2 Continuité sur un intervalle

Définition

Soit f définie sur un intervalle I .

- f est *continue sur l'intervalle ouvert* $]a; b[$ si elle est continue en tout point de $]a; b[$.
- f est continue sur $[a; b[$ si elle est continue sur $]a; b[$ et continue à droite en a .
- Définitions analogues pour $]a; b]$, $[a; b]$, $]a; +\infty[$, $[a; +\infty[$, $] -\infty; b[$, $] -\infty; b]$.

Remarque

Géométriquement, si f est continue sur $[a; b]$, on peut tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$ d'un seul trait, sans lever le crayon.

2.1 Continuité des fonctions usuelles

Proposition

- Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle est continue sur tout intervalle inclus dans son domaine de définition.
- $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0; +\infty[$.
- $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
- $x \mapsto \tan x$ est continue sur chaque intervalle $\left] -\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$, $k \in \mathbb{Z}$.

2.2 Opérations sur les fonctions continues

Proposition

Soient f et g continues sur un intervalle I , et $\alpha \in \mathbb{R}$.

- $f + g$, fg et αf sont continues sur I .
- Si g ne s'annule pas sur I , alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I .
- Si f est continue et positive sur I , alors $\sqrt{f}$ est continue sur I .

Proposition

Continuité de la composée

Soient f continue sur I et g continue sur J avec $f(I) \subset J$. Alors $g \circ f$ est continue sur I .

Exemple

« Identification de la continuité. »

Étudier la continuité de $f(x) = \cos(x^2 + 4x)$ sur $\mathbb{R}$.

Solution. $u(x) = x^2 + 4x$ est polynômiale donc continue sur $\mathbb{R}$. $v(x) = \cos x$ est continue sur $\mathbb{R}$. Donc $f = v \circ u$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Application

Étudier la continuité des fonctions sur l'intervalle indiqué :

- $f_1(x) = x + \sqrt{x}$, $I = [0; +\infty[$
- $f_2(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 4} - \sin x$, $I = \mathbb{R}$
- $f_3(x) = \tan x$, $I =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$
- $f_4(x) = \sin\left(\frac{x^2 - 1}{x}\right)$, $I = \mathbb{R}^*$

À faire à la maison

Soit f définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = 3x^2 - x - \frac{1}{4}$ si $x \in [0; \frac{1}{2}[$ et $f(x) = 1 - \frac{7}{6x + 4}$ si $x \in [\frac{1}{2}; 1]$.

- 1 Montrer que f est continue sur $]0; \frac{1}{2}[$ et sur $]\frac{1}{2}; 1[$.
- 2 Étudier la continuité de f en $\frac{1}{2}$.
- 3 Conclure que f est continue sur $[0; 1]$.
- 4 Déterminer les bornes de f sur $[0; 1]$.

3 Image d'un intervalle par une fonction continue

Proposition

- Si f est continue sur un intervalle I , alors $f(I)$ est un intervalle.
- Si f est continue sur un segment $[a; b]$, alors $f([a; b]) = [m; M]$, où m et M sont les valeurs minimale et maximale de f sur $[a; b]$.

3.1 Cas d'une fonction continue strictement monotone

Si f est strictement croissante :

I	$f(I)$
$[a; b]$	$[f(a); f(b)]$
$[a; b[$	$[f(a); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)[$
$]a; b]$	$] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); f(b)]$
$]a; +\infty[$	$] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$

Si f est strictement décroissante :

I	$f(I)$
$[a; b]$	$[f(b); f(a)]$
$[a; b[$	$] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x); f(a)]$
$]a; b]$	$[f(b); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)[$
$] -\infty; b[$	$] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)[$

Exemple

« Détermination de $f(I)$. »

Soit $f(x) = x^2$ sur $I = [1; +\infty[$. Déterminer $f(I)$.

Solution. f est continue et strictement croissante sur $[1; +\infty[$. Donc $f(I) = [f(1); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[= [1; +\infty[$.

Application

Déterminer $f(I)$ dans chaque cas :

- $f(x) = \tan x, I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$
- $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}, I = [0; 1[$
- $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x - 3}, I =]-\infty; -1[$
- $f(x) = \frac{3x + 4}{2x + 1}, I = \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[$

À faire à la maison

- Soit $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ sur $\mathbb{R}$.
 - Étudier la monotonie de f sur $\mathbb{R}_+$ et sur $\mathbb{R}_-$.
 - Déterminer $f(\mathbb{R}_+)$ et $f(\mathbb{R}_-)$.
 - En déduire $f(\mathbb{R})$.
- Soit $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$ sur $\mathbb{R}$. Déterminer le domaine, étudier les variations et calculer $f(\mathbb{R})$.

4 Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

Théorème

Si f est continue sur $[a; b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe **au moins un** $\alpha \in [a; b]$ tel que $f(\alpha) = k$.

Conséquence

Si f est continue sur $[a; b]$ et $f(a) \cdot f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet **au moins une solution** dans $]a; b[$.

Conséquence

Si f est continue et **strictement monotone** sur $[a; b]$ avec $f(a) \cdot f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une **unique solution** dans $]a; b[$.

Exemple

« Existence et unicité d'une racine. »

Montrer que l'équation $x^4 + x^2 + 4x - 1 = 0$ admet au moins une solution dans $[0; 1]$.

Solution. Soit $f(x) = x^4 + x^2 + 4x - 1$. f est polynômiale donc continue sur $[0; 1]$. $f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = 1 + 1 + 4 - 1 = 5 > 0$, donc $f(0) \cdot f(1) < 0$. D'après le TVI, f s'annule au moins une fois sur $]0; 1[$.

Application

1 Montrer que $2 \cos x - 1 = 0$ admet au moins une solution dans $[0; \pi]$.

2 Montrer que $\cos x + \frac{1}{2} = x$ admet une unique solution dans $]0; \frac{\pi}{3}[$.

À faire à la maison

1 Soit $f(x) = x^3 + 3x - 1$ sur $\mathbb{R}$.

- Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
- Donner un encadrement de α d'amplitude 0,1.

2 Soit $g(x) = \cos(x) - x$ sur $[0; 1]$. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0; 1[$, et donner un encadrement à 0,01 près.

5 Méthode de la dichotomie

La dichotomie est une méthode de **recherche d'une valeur approchée** d'une racine d'équation. Elle s'appuie sur la conséquence du TVI : si f est continue sur $[a; b]$ et $f(a) \cdot f(b) < 0$, alors une racine existe dans $]a; b[$.

Définition

Procédure. Soit f continue sur $[a; b]$ avec $f(a) \cdot f(b) < 0$.

- Calculer $c = \frac{a+b}{2}$.
- Si $f(a) \cdot f(c) < 0$, la racine est dans $[a; c]$: remplacer b par c .
 - Sinon, la racine est dans $[c; b]$: remplacer a par c .
- Recommencer jusqu'à atteindre la précision souhaitée. À chaque itération, l'amplitude est divisée par 2.

Exemple

« Approximation de $\sqrt{3}$ à 10^{-2} près. »

Soit $f(x) = x^2 - 3$. On sait que $\sqrt{3} \in [1; 2]$.

Solution.

- Étape 1 : $c = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$. $f(1) \cdot f(\frac{3}{2}) = (-2)(-\frac{3}{4}) > 0$, donc $\sqrt{3} \in [\frac{3}{2}; 2]$.
- Étape 2 : $c = \frac{7}{4}$. $f(\frac{3}{2}) \cdot f(\frac{7}{4}) < 0$, donc $\sqrt{3} \in [\frac{3}{2}; \frac{7}{4}]$.
- En continuant, on obtient $\sqrt{3} \approx 1,73$ à 10^{-2} près.

Application

Approximer la solution de l'équation $f(x) = 0$:

- $f(x) = x^2 - 10$, $I = [3; 4]$, à 10^{-3} près.
- $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$, $I = [-2; 0]$, à 10^{-2} près.

À faire à la maison

Soit $f(x) = x^3 + x - 3$ sur $\mathbb{R}$.

- 1 Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- 2 Démontrer que $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [1; 2]$.
- 3 Appliquer la méthode de dichotomie pour donner un encadrement de α d'amplitude $\frac{1}{16}$ (c.-à-d. après 4 itérations).

6 Fonction réciproque

Théorème

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I . Alors f admet une **fonction réciproque** f^{-1} définie sur $J = f(I)$, telle que :

$$\begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases} \iff \begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in J \end{cases}$$

Proposition

Soit f continue et strictement monotone sur I , f^{-1} sa réciproque sur $J = f(I)$.

- $\forall x \in I, f^{-1}(f(x)) = x$.
- $\forall y \in J, f(f^{-1}(y)) = y$.
- f^{-1} est continue et strictement monotone sur J , de **même monotonie** que f .
- Les courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.

Exemple

« Construction d'une fonction réciproque. »

Soit $f(x) = \sqrt{2x-1}$ sur $I = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$. Montrer que f admet une réciproque, déterminer son expression.

Solution. f est composée de fonctions continues, donc continue sur I . Elle est strictement croissante (la fonction sous racine l'est, et $\sqrt{\cdot}$ aussi). Donc f admet une réciproque sur $J = f(I) = [0; +\infty[$.

Pour $y \in J : f(x) = y \iff \sqrt{2x-1} = y \iff 2x-1 = y^2 \iff x = \frac{y^2+1}{2}$. Donc $f^{-1}(x) = \frac{x^2+1}{2}$ pour $x \in [0; +\infty[$.

Application

Soit $g(x) = \frac{x-3}{x+2}$.

- 1 Montrer que g est continue et strictement monotone sur $] -2; +\infty[$.
- 2 Déterminer $J = g(]-2; +\infty[)$ et l'expression de g^{-1} .

À faire à la maison

Soit $h(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ sur $[0; +\infty[$.

- 1 Montrer que h est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
- 2 Déterminer $J = h([0; +\infty[)$.
- 3 Justifier l'existence d'une réciproque $h^{-1} : J \rightarrow [0; +\infty[$.
- 4 Pour $y \in J$, exprimer $h^{-1}(y)$ en fonction de y .
- 5 Déterminer la monotonie de h^{-1} .

7 Fonction racine n -ième

Théorème

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $x \mapsto x^n$ est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$. Elle admet donc une fonction réciproque appelée *racine n -ième*, notée $x \mapsto \sqrt[n]{x}$, définie sur $[0; +\infty[$.

Ainsi, pour tout $x, y \in [0; +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$y = x^n \iff x = \sqrt[n]{y}.$$

Exemple

$$\sqrt[3]{8} = 2, \quad \sqrt[3]{27} = 3, \quad \sqrt[4]{16} = 2.$$

Proposition

Soient $a, b \in [0; +\infty[$, $n, m \in \mathbb{N}^*$.

- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
- $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad (b \neq 0)$
- $\sqrt[nm]{a^m} = \sqrt[n]{a}$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$
- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = \sqrt[nm]{a^{n+m}}$
- $\sqrt[n]{\frac{1}{b}} = \frac{1}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0)$

Conséquence

Pour tout $x, y \in [0; +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

- $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \iff x = y.$
- $\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y} \iff x < y.$

Exemple

« Comparaison de racines. »

Comparer $\sqrt[7]{3}$ et $\sqrt[5]{2}$.

Solution. Élevons à la puissance 35 : $(\sqrt[7]{3})^{35} = 3^5 = 243$ et $(\sqrt[5]{2})^{35} = 2^7 = 128$. Comme $243 > 128$, $\sqrt[7]{3} > \sqrt[5]{2}$.

7.1 Limites avec la racine n -ième

Proposition

Soit f une fonction positive sur un intervalle I , et $x_0 \in I$ ou borne de I , $n \in \mathbb{N}^*$.

- Si f est continue sur I , alors $\sqrt[n]{f}$ est continue sur I .
- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \geq 0$, alors $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\ell}$.
- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = +\infty$.

Application

Calculer les limites :

1 $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x^2 + 27}$

3 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x}$

2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[5]{x^3 - x} + 3$

4 $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x - 8}$

À faire à la maison

1 Simplifier :

• $A = \frac{\sqrt[3]{1024} \times \sqrt[5]{3200000}}{\sqrt[4]{64} \times \sqrt[3]{\sqrt{256}} \times \sqrt{2}}$

• $B = \sqrt[5]{32} - (\sqrt[7]{2})^7 + \sqrt[3]{\sqrt[3]{512}} + \frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}$

2 Résoudre dans $\mathbb{R}$: (a) $\sqrt[3]{x} - x = 0$; (b) $\sqrt[3]{x} - 5\sqrt[6]{x} + 6 = 0$.

3 Calculer les limites :

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x^2} - x$

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x+1} - 1}$

8 Puissance rationnelle d'un réel strictement positif

Définition

Soit $x > 0$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$. On définit :

$$x^{p/q} = (\sqrt[q]{x})^p = \sqrt[q]{x^p}.$$

Proposition

Soient $a, b > 0$ et $r, r' \in \mathbb{Q}$.

• $a^r \cdot a^{r'} = a^{r+r'}$

• $\frac{a^r}{a^{r'}} = a^{r-r'}$

• $\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$

• $(a^r)^{r'} = a^{rr'}$

• $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$

• $a^r \cdot b^r = (ab)^r$

Proposition

Soit $r \in \mathbb{Q}^*$.

- Si $r > 0$: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^r = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^r = +\infty$.
- Si $r < 0$: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^r = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^r = 0$.

Exemple

« Calcul d'une puissance rationnelle. »

Calculer $1728^{2/3}$.

Solution. $1728 = 12^3$, donc $1728^{2/3} = (12^3)^{2/3} = 12^2 = 144$.

Application

Calculer les limites :

1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^5 + 2x^3 - x + 4}$

3 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-2}}$

2 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x+6} - \sqrt{x+3}}{x-1}$

4 $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt[4]{x^2-1}}{\sqrt{x-1}}$

À faire à la maison

1 Simplifier : (a) $\frac{16^{1/2} \cdot 8^{2/3}}{4^{1/2}}$; (b) $(2^{1/4})^{12} \cdot (8^{1/3})^{-2}$.

2 Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$: (a) $x^{2/3} = 4$; (b) $x^{3/4} - 8 = 0$.

3 Calculer la limite : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{2/3} + x^{1/2}}{x^{1/3} + 1}$.