

Série d'exercices N°3 (S2)

Dénombrement

1^{ère} Année Baccalauréat – Sciences Mathématiques

Consignes. Pour chaque exercice, identifier le modèle utilisé (p-liste, arrangement, permutation, combinaison) en justifiant ordre / répétition.

Couverture. 14 exercices : calculs A_n^p , $n!$, $\binom{n}{p}$; codes ; classements ; comités ; tirages ; mots et anagrammes ; binôme de Newton.

I. Calculs et identités

Exercice 1 *Calculs directs*

Calculer :

1. A_7^3 , A_8^4 , A_{10}^2 .
2. $\binom{6}{2}$, $\binom{8}{5}$, $\binom{10}{0}$, $\binom{10}{10}$.
3. $\frac{12!}{9!}$, $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$.

Exercice 2 *Équations sur A_n^p et $\binom{n}{p}$*

Résoudre dans $\mathbb{N}$:

1. $A_n^2 = 30$.
2. $A_n^3 = 6A_n^2$.
3. $\binom{n}{2} = 21$.
4. $\binom{n}{3} = \binom{n}{4}$.
5. $A_n^4 = 12A_n^2$.

Exercice 3 *Identités à démontrer*

Démontrer pour tous n, p valides :

1. $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.
2. $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$ (formule de Pascal).
3. $p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$.
4. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.

II. Codes, classements et anagrammes

Exercice 4 *Codes et numéros*

1. Combien de codes à 6 chiffres avec répétition autorisée ?
2. Combien de codes à 6 chiffres sans répétition ?
3. Combien de codes à 6 chiffres commençant par 0 (sans répétition) ?
4. Combien de codes à 4 chiffres dont le premier est non nul (sans répétition) ?

Exercice 5 *Classements (arrangements)*

Une compétition oppose 10 athlètes.

1. Combien de classements complets (ordre des 10) ?
2. Combien de podiums possibles (3 premières places) ?
3. Combien de podiums possibles avec un athlète favori parmi les 3 premiers ?

Exercice 6 *Anagrammes*

1. Combien d'anagrammes du mot "CASABLANCA" ?
2. Combien d'anagrammes du mot "MATHEMATIQUES" ?
3. Combien d'anagrammes du mot "LOGIQUE" commençant par une voyelle ?
4. Combien de mots de 5 lettres distinctes peut-on former avec les lettres de "ABCDEFGH" ?

III. Combinaisons et tirages

Exercice 7 *Comités*

Une classe compte 20 élèves (10 filles, 10 garçons). On veut former un comité de 5 élèves.

1. Combien de comités possibles ?
2. Combien de comités contenant exactement 2 filles ?
3. Combien contenant au moins 1 fille ?
4. Combien contenant au plus 2 garçons ?
5. Combien contenant le délégué Ali et la déléguée Zineb ?

Exercice 8 *Tirages*

Une urne contient 5 boules rouges, 4 blanches et 3 noires.

1. On tire *simultanément* 3 boules. Combien de tirages possibles ?
2. Combien de tirages contenant 3 rouges ?
3. Combien de tirages contenant exactement 1 blanche ?
4. Combien de tirages contenant exactement 1 boule de chaque couleur ?
5. Combien de tirages contenant *au moins* 1 rouge ?

Exercice 9 *Tirages avec ordre*

Avec l'urne précédente, on tire 3 boules *successivement et sans remise*.

1. Combien de tirages possibles ?
2. Combien commencent par une rouge ?
3. Combien sont du type « rouge, blanche, noire » dans cet ordre exact ?

Exercice 10 *Tirages avec remise*

Reprenez l'urne précédente : on tire 3 boules *successivement et avec remise*.

1. Combien de tirages possibles ?
2. Combien contiennent les 3 couleurs (une à chaque tirage) ?
3. Combien contiennent au moins une noire ?

IV. Géométrie et dénombrement**Exercice 11** *Points et droites*

On considère 10 points du plan, dont 4 sont alignés et les autres sont en position générale (aucun trio sauf les 4 alignés n'est aligné).

1. Combien de droites peut-on former passant par 2 de ces points ?
2. Combien de triangles peut-on former (sommets parmi ces 10 points) ?

V. Binôme de Newton**Exercice 12** *Développements*

Développer en utilisant la formule du binôme :

1. $(x + 1)^5$.
2. $(2x - 3)^4$.
3. $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6$.
4. $(\sqrt{2} + 1)^4$.

Exercice 13 *Coefficient particulier*

1. Déterminer le coefficient de x^3 dans $(2x + 1)^7$.
2. Déterminer le coefficient de x^4 dans $(x^2 + 3)^6$.
3. Le coefficient de x^0 (terme constant) dans $\left(x - \frac{2}{x}\right)^{10}$.

VI. Problèmes de synthèse

Exercice 14 *Identité du capitaine*

Démontrer pour tous $n, p \geq 1$:

$$p \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1}.$$

Interprétation combinatoire : choisir une équipe de p personnes parmi n , et désigner un capitaine, c'est équivalent à choisir le capitaine d'abord puis l'équipe.

Exercice 15 *Identité de Vandermonde*

Démontrer pour tous m, n, p valides :

$$\binom{m+n}{p} = \sum_{k=0}^p \binom{m}{k} \binom{n}{p-k}.$$

Indication : interpréter en termes de comités mixtes.

Fin de la série – Dénombrement