

Dénombrement

1^{ère} Année Baccalauréat – Sciences Mathématiques

Volume horaire officiel : 12h (cf. répartition 2013) – **Pré-requis** : ensembles et applications, suites, fonctions.

Capacités attendues : utiliser un arbre des choix dans des situations de dénombrement ; utiliser le modèle de dénombrement adapté selon la situation étudiée ; appliquer le dénombrement à la résolution de problèmes variés.

Table des matières

1	Principes fondamentaux du dénombrement	2
1.1	Cardinal d'un ensemble	2
1.2	Principe additif	2
1.3	Principe multiplicatif	2
1.4	Arbre des choix	3
1.5	Cardinal d'un produit cartésien	3
2	p-listes (arrangements avec répétition)	4
3	Arrangements (sans répétition)	5
4	Permutations	6
5	Combinaisons	7
5.1	Propriétés des $\binom{n}{p}$	7
5.2	Triangle de Pascal	8
6	Formule du binôme de Newton	9
6.1	Identités notables	9
7	Synthèse	10
7.1	Récapitulatif des formules	10
7.2	Méthodologie	10
7.3	Pièges classiques	10

1. Principes fondamentaux du dénombrement

1.1 Cardinal d'un ensemble

Définition

Définition 1.1 — Pour un ensemble fini E , on note $\text{Card}(E)$ ou $|E|$ le **nombre d'éléments** de E .

1.2 Principe additif

Théorème

Théorème 1.1 — (**Principe additif**) Si A et B sont deux ensembles finis *disjoints* ($A \cap B = \emptyset$) :

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B).$$

Plus généralement, pour des ensembles deux à deux disjoints $A_1, \dots, A_n$:

$$\text{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \text{Card}(A_1) + \text{Card}(A_2) + \dots + \text{Card}(A_n).$$

Théorème

Théorème 1.2 — (**Formule de Poincaré, cas $n = 2$**) Pour deux ensembles finis quelconques A, B :

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B).$$

Exemple

Exemple 1.1 — Dans un lycée de 200 élèves, 120 font du sport, 80 font de la musique, 50 font les deux.

Combien font *au moins* l'une des deux activités ?

Solution. $\text{Card}(S \cup M) = 120 + 80 - 50 = 150$ élèves.

1.3 Principe multiplicatif

Théorème

Théorème 1.3 — (**Principe multiplicatif**) Si l'on effectue p choix successifs, et que le i -ème choix peut être fait de n_i façons (indépendamment des autres), alors le nombre total de possibilités est :

$$n_1 \times n_2 \times \dots \times n_p.$$

Exemple

Exemple 1.2 — Combien de codes à 4 chiffres peut-on former (chiffres 0-9, répétitions autorisées) ?

Solution. $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4 = 10\,000$ codes.

Si les chiffres doivent être distincts : $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$ codes.

1.4 Arbre des choix

Remarque

Un **arbre des choix** (ou diagramme en arbre) est une représentation graphique des possibilités. Chaque niveau correspond à un choix ; le nombre total de feuilles est le nombre de possibilités.

1.5 Cardinal d'un produit cartésien

Théorème

Théorème 1.4 — Pour deux ensembles finis E, F : $\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E) \times \text{Card}(F)$.
Plus généralement, $\text{Card}(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n) = \text{Card}(E_1) \times \cdots \times \text{Card}(E_n)$.
En particulier, $\text{Card}(E^n) = \text{Card}(E)^n$.

2. p -listes (arrangements avec répétition)

Définition

Définition 2.1 — Soit E un ensemble fini à n éléments. Une **p -liste** de E (ou p -uplet) est un élément de E^p : une suite ordonnée de p éléments de E , avec répétitions possibles.

Théorème

Théorème 2.1 — Le nombre de p -listes de E (avec $\text{Card}(E) = n$) est :

$$n^p.$$

Exemple

Exemple 2.1 — Combien de mots de 5 lettres (avec ou sans signification) peut-on former avec les 26 lettres de l'alphabet ?

Solution. $26^5 = 11\,881\,376$ mots.

3. Arrangements (sans répétition)

Définition

Définition 3.1 — Soit E un ensemble à n éléments et $p \leq n$. Un **arrangement** de p éléments de E est une *liste ordonnée* de p éléments *distincts* de E (sans répétition).

Le nombre d'arrangements se note A_n^p .

Théorème

Théorème 3.1 — Pour $0 \leq p \leq n$:

$$A_n^p = n(n-1)(n-2) \cdots (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Démonstration

Pour former un arrangement, on choisit le 1er élément parmi n , le 2ème parmi les $n-1$ restants, ..., le p -ème parmi $n-p+1$ restants. Par principe multiplicatif : $n(n-1) \cdots (n-p+1)$. $\square$

Exemple

Exemple 3.1 — Une classe de 30 élèves élit un président, un vice-président et un trésorier. Combien de bureaux possibles ?

Solution. On choisit 3 élèves distincts, dans un ordre précis. C'est $A_{30}^3 = 30 \times 29 \times 28 = 24\,360$.

4. Permutations

Définition

Définition 4.1 — Une **permutation** d'un ensemble E à n éléments est un arrangement de tous les n éléments de E .

Théorème

Théorème 4.1 — Le nombre de permutations de E (avec $\text{Card}(E) = n$) est :

$$n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \cdots \times 2 \times 1.$$

Par convention $0! = 1$ et $1! = 1$.

Exemple

Exemple 4.1 — Combien d'anagrammes du mot « MATH » ?

Solution. 4 lettres distinctes, donc $4! = 24$.

Pour « MATHS » : $5! = 120$.

Remarque

Cas de répétitions. Pour « MAMA » : $4!/(2! \cdot 2!) = 6$ permutations distinctes (les deux M et les deux A sont indiscernables).

Formule générale. Si un mot compte n lettres avec n_1 occurrences de la 1ère, n_2 de la 2ème, ..., le nombre d'anagrammes est :

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_k!}.$$

5. Combinaisons

Définition

Définition 5.1 — Soit E un ensemble à n éléments et $p \leq n$. Une **combinaison** de p éléments de E est un *sous-ensemble* de E à p éléments (l'ordre ne compte pas, pas de répétitions).

Le nombre de combinaisons se note $\binom{n}{p}$ ou C_n^p .

Théorème

Théorème 5.1 — Pour $0 \leq p \leq n$:

$$\binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Démonstration

À chaque combinaison de p éléments correspondent $p!$ arrangements (les $p!$ ordres possibles). Donc $A_n^p = p! \binom{n}{p}$. □

5.1 Propriétés des $\binom{n}{p}$

Propriété

Propriété 5.1 —

$$\binom{n}{0} = 1 \quad ; \quad \binom{n}{n} = 1 \quad ; \quad \binom{n}{1} = n.$$

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} \quad (\text{symétrie}).$$

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} \quad (\text{formule de Pascal}).$$

Démonstration

Symétrie. Choisir p éléments dans E revient à choisir les $n - p$ éléments *exclus*.

Pascal. Soit $a \in E$ fixé. Les sous-ensembles à p éléments de E se répartissent en deux catégories :

- ceux qui contiennent a : il y en a $\binom{n-1}{p-1}$ (choix des $p - 1$ autres).
- ceux qui ne contiennent pas a : il y en a $\binom{n-1}{p}$ (choix des p dans $E \setminus \{a\}$).

Total : $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$. □

5.2 Triangle de Pascal

$n \setminus p$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

Exemple

Exemple 5.1 — Une classe compte 30 élèves. On forme un comité de 4. Combien de comités possibles ?

Solution. Combinaison sans ordre : $\binom{30}{4} = \frac{30!}{4! 26!} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27}{24} = 27\,405$.

6. Formule du binôme de Newton

Théorème

Théorème 6.1 — (Binôme de Newton) Pour tous réels a, b et $n \in \mathbb{N}$:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Démonstration

Par récurrence sur n .

Init ($n = 0$). $(a + b)^0 = 1 = \binom{0}{0} a^0 b^0$.

Hér. Supposons la formule vraie au rang n . Alors :

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= (a + b)(a + b)^n = (a + b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1}. \end{aligned}$$

Après réindexation et utilisation de la formule de Pascal, on obtient le résultat au rang $n + 1$. $\square$

Exemple

Exemple 6.1 — Développer $(2x + 3)^4$.

Solution.

$$\begin{aligned} (2x + 3)^4 &= \binom{4}{0} (2x)^0 3^4 + \binom{4}{1} (2x)^1 3^3 + \binom{4}{2} (2x)^2 3^2 + \binom{4}{3} (2x)^3 3^1 + \binom{4}{4} (2x)^4 3^0 \\ &= 81 + 4 \cdot 2x \cdot 27 + 6 \cdot 4x^2 \cdot 9 + 4 \cdot 8x^3 \cdot 3 + 16x^4 \\ &= 81 + 216x + 216x^2 + 96x^3 + 16x^4. \end{aligned}$$

6.1 Identités notables

Propriété

Propriété 6.1 —

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} &= 2^n \quad (\text{en prenant } a = b = 1). \\ \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} &= 0 \quad (\text{en prenant } a = -1, b = 1). \end{aligned}$$

7. Synthèse

7.1 Récapitulatif des formules

Notion	Caractérisation	Nombre
p -liste	ordre + répétition	n^p
Arrangement	ordre, sans répétition	$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$
Permutation	ordre, tous les éléments	$n!$
Combinaison	sans ordre, sans répétition	$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

7.2 Méthodologie

Méthode

Pour identifier le bon modèle :

- Y a-t-il un **ordre** ? Oui $\rightarrow$ arrangement/ p -liste/permutation. Non $\rightarrow$ combinaison.
- Y a-t-il des **répétitions** possibles ? Oui $\rightarrow p$ -liste (n^p). Non $\rightarrow$ arrangement/combinaison.
- Choisit-on **tous** les éléments ? Oui $\rightarrow$ permutation ($n!$). Non $\rightarrow$ arrangement/combinaison.

7.3 Pièges classiques

Remarque

1. **Confondre** A_n^p et $\binom{n}{p}$. A pour ordonné, $()$ pour non ordonné.
2. **Permutations avec répétition**. Diviser par les factorielles des effectifs des éléments répétés.
3. **Principe additif et ensembles non disjoints**. Soustraire l'intersection.
4. **Mauvaise distinction « au moins / au plus »**. Penser au complémentaire.