

Série d'exercices — Chapitre 2 : Dérivation et étude de fonctions

2^e BAC SX BIOF

En. Nidal SABI

Exercice 1 — Calcul de dérivées

Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes sur un intervalle approprié :

1. $f_1(x) = \frac{2x}{1+x^2}$

2. $f_2(x) = (x^2 + 1)^5$

3. $f_3(x) = \sqrt{x} \sin x + \cos x$

4. $f_4(x) = \cos(\sqrt{x})$

5. $f_5(x) = \sqrt[3]{x^2 + 2x}$

6. $f_6(x) = \tan(2x + 1)$

Exercice 2 — Tangentes et concavité

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

1. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
2. Écrire l'équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse $x_0 = 0$.
3. Étudier la concavité de (C_f) et déterminer son point d'inflexion.
4. Déterminer le ou les point(s) où la tangente à (C_f) est horizontale.

Exercice 3 — Dérivabilité et demi-tangente verticale

Soit f définie par $f(x) = x\sqrt{3-2x}$.

1. Donner le domaine de définition D_f .
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
3. Étudier la dérivabilité de f à gauche en $\frac{3}{2}$. Interpréter graphiquement.
4. Montrer que pour tout $x \in D_f \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$, $f'(x) = \frac{3(1-x)}{\sqrt{3-2x}}$.
5. Étudier les variations de f et dresser son tableau.
6. Soit g la restriction de f à $] -\infty ; 1]$.
 - (a) Justifier que g admet une réciproque g^{-1} sur un intervalle J à déterminer.
 - (b) Étudier la dérivabilité de g^{-1} sur J et calculer $(g^{-1})'(0)$.

Exercice 4 — Étude avec asymptote oblique et points d'inflexion

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{1}{x^2 + 1}$.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$, et montrer que $(\Delta) : y = x + \frac{1}{2}$ est asymptote oblique en $\pm\infty$.
2. Calculer $f'(x)$ et montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. Écrire l'équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse -1 .
4. Montrer que (C_f) admet deux points d'inflexion à déterminer.
5. Justifier que f admet une réciproque f^{-1} sur un intervalle J à déterminer.
6. Montrer que f^{-1} est dérivable en 0 et calculer $(f^{-1})'(0)$.

Exercice 5 — Étude avec fonction auxiliaire

Partie A. Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$.
3. En déduire que $g(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Partie B. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 1 + \sqrt{x^2 + 1}$.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ et interpréter.
2. Montrer que $(D) : y = 2x - 1$ est asymptote oblique de (C_f) en $+\infty$.
3. Montrer que $f'(x) = g(x)$ et dresser le tableau de variations de f .
4. Montrer que f admet une réciproque f^{-1} sur un intervalle J à préciser.

Exercice 6 — Axe de symétrie + dérivabilité

Soit f définie par $f(x) = 1 - \sqrt{x^2 + 2x}$.

1. Déterminer D_f .
2. Montrer que la droite $x = -1$ est un axe de symétrie de (C_f) . En déduire le domaine d'étude.
3. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
4. Étudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter.
5. Montrer que $y = -x$ est asymptote oblique de (C_f) en $+\infty$.
6. Étudier les variations de f et dresser son tableau.
7. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [0; +\infty[$ et que $0 < \alpha < 1$.

Exercice 7 — Centre de symétrie + réciproque

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ et étudier les branches infinies.
2. Montrer que $\Omega(1; -1)$ est un centre de symétrie de (C_f) .
3. Calculer $f'(x)$, étudier son signe, et dresser le tableau de variations.
4. Montrer que Ω est un point d'inflexion de (C_f) .
5. Soit g la restriction de f à $[2; +\infty[$.
 - (a) Montrer que g admet une réciproque g^{-1} sur J à déterminer.
 - (b) Montrer que g^{-1} est dérivable en 1 et calculer $(g^{-1})'(1)$.

Exercice 8 — Étude avec dérivabilité à droite

Soit f définie par $f(x) = x - \sqrt{2x - 1}$.

1. Déterminer D_f .
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et préciser la nature de la branche infinie.
3. Étudier la dérivabilité de f à droite en $\frac{1}{2}$. Interpréter graphiquement.
4. Montrer que f est dérivable sur $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$ et que le signe de $f'(x)$ est celui de $x - 1$.
5. Dresser le tableau de variations de f sur D_f .
6. Soit g la restriction de f à $[1; +\infty[$. Montrer que g admet une réciproque g^{-1} sur J à préciser et

calculer $(g^{-1})'(2)$.

Exercice 9 — Étude par morceaux

Soit f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 3}{x + 1} & \text{si } x \leq 0 \\ -\frac{\sqrt{x+1}}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. Déterminer D_f et calculer les limites de f aux bornes.
2. Étudier les branches infinies.
3. f est-elle continue en 0 ?
4. Étudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter graphiquement.
5. Sur chaque morceau, calculer $f'(x)$, étudier son signe, et dresser le tableau de variations.

Exercice 10 — Application directe : dérivée d'une réciproque

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x + 1$.

1. Calculer $f'(x)$ et montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire que f admet une réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer $f(0)$ et $f(1)$.
4. Sans déterminer l'expression de f^{-1} , calculer $(f^{-1})'(1)$ et $(f^{-1})'(3)$.