

Table des matières

1	Dérivée en un point	2
1.1	Dérivée à droite, à gauche, point anguleux	2
1.2	Dérivabilité $\Rightarrow$ Continuité	2
2	Fonctions dérivables et opérations	3
2.1	Tableau des dérivées usuelles	3
2.2	Opérations sur les dérivées	4
3	Dérivée de la composée	4
4	Dérivée de la fonction réciproque	5
4.1	Dérivée de $\sqrt[n]{x}$ et de $\sqrt[n]{u}$	5
5	Comportement asymptotique	7
5.1	Schéma récapitulatif	7
6	Concavité et points d'inflexion	8
7	Éléments de symétrie	9
7.1	Axe de symétrie	9
7.2	Centre de symétrie	9
8	Correspondance $(C_f) \leftrightarrow (C_{f^{-1}})$	9

1 Dérivée en un point

Définition

Soit f définie sur un intervalle ouvert I et $a \in I$. On dit que f est **dérivable en a** s'il existe un réel ℓ tel que :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell.$$

Ce nombre ℓ , noté $f'(a)$, est la **dérivée** de f en a . La courbe (C_f) admet en $A(a, f(a))$ une **tangente** d'équation :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Exemple

« Dérivée en un point. »

Soit $f(x) = x^2 + 3x$. Calculer $f'(2)$ et écrire l'équation de la tangente en $A(2, f(2))$.

Solution. $\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{x^2 + 3x - 10}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 5)}{x - 2} = x + 5$. Donc $\lim_{x \rightarrow 2} (x + 5) = 7 = f'(2)$. La tangente en A a pour équation $y = 7(x - 2) + 10 = 7x - 4$.

1.1 Dérivée à droite, à gauche, point anguleux

Définition

- $f'_d(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$: *dérivée à droite* en a .
- $f'_g(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$: *dérivée à gauche* en a .

Propriété

f est dérivable en a **ssi** $f'_g(a)$ et $f'_d(a)$ existent et sont égales :

$$f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a).$$

Remarque

- Si f est continue en a et $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty$, (C_f) admet une **demi-tangente verticale** à droite en $A(a, f(a))$ (idem à gauche).
- Si $f'_g(a) \neq f'_d(a)$ avec les deux finies, (C_f) admet deux demi-tangentes non parallèles en A : c'est un **point anguleux**.

1.2 Dérivabilité $\Rightarrow$ Continuité

Propriété

Si f est dérivable en a , alors f est continue en a . La réciproque est **fausse** en général.

Exemple

« Contre-exemple : $|x|$ en 0. »

La fonction $x \mapsto |x|$ est continue en 0 mais n'y est pas dérivable.

Solution. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$. Les dérivées à gauche et à droite existent mais sont différentes : $|x|$ n'est pas dérivable en 0. Le point $(0, 0)$ est anguleux.

Application

Soit $f(x) = \sqrt{x} - 1$ si $0 \leq x < 1$ et $f(x) = \frac{x^2 - 1}{4}$ si $x \geq 1$.

- 1 Montrer que f est continue en 1.
- 2 Étudier la dérivabilité de f en 1.

À faire à la maison

- 1 Étudier la dérivabilité en a et interpréter graphiquement :
 - a. $f(x) = x^3 - x$, $a = 2$
 - b. $f(x) = \frac{x+1}{x}$, $a = 1$
 - c. $f(x) = (3x - 5)^4$, $a = 2$
 - d. $f(x) = \sqrt{2x+1}$, $a = 0$
- 2 Soit $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
 - a. Étudier la continuité de f en 0.
 - b. Étudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter graphiquement.
- 3 Montrer que $f(x) = x + 1 + 2\sqrt{1-x}$ définie sur $] -\infty; 1]$ n'est pas dérivable à gauche en 1 ; interpréter géométriquement.

2 Fonctions dérivables et opérations

Propriété

Les fonctions polynomiales, $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Toute fonction rationnelle est dérivable sur tout intervalle inclus dans son domaine de définition.

2.1 Tableau des dérivées usuelles

Fonction f	Dérivée f'	Domaine
$x \mapsto a$, $a \in \mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
$x \mapsto ax + b$	a	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$x \mapsto \cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2(x)$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

2.2 Opérations sur les dérivées

Propriété

Soient f, g dérivables sur un intervalle I et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- $(f + g)' = f' + g'$
- $(\lambda f)' = \lambda f'$
- $(fg)' = f'g + fg'$
- $(f^n)' = n f^{n-1} f'$, $n \in \mathbb{N}^*$
- Si $g \neq 0$ sur I : $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
- Si $f \neq 0$ sur I : $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$
- Si $f > 0$ sur I : $(\sqrt{f})' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$

Exemple

« Calcul d'une dérivée. »

Calculer la dérivée de $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

Solution. Quotient de fonctions dérivables :

$$f'(x) = \frac{2(1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

Application

Calculer les dérivées sur un intervalle approprié :

- $f_1(x) = \sqrt{x} \sin x + \cos x$
- $f_3(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$
- $f_5(x) = \sqrt{x^2+1}$
- $f_2(x) = (x^2+1)^5$
- $f_4(x) = x \cos x$
- $f_6(x) = \tan(2x+1)$

À faire à la maison

Soit $g(x) = x\sqrt{x} - 1$ définie sur $[0; +\infty[$.

- 1 Étudier la dérivabilité à droite de g en 0 et interpréter.
- 2 Montrer que g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et calculer g' .
- 3 Dresser le tableau de variations de g .
- 4 Calculer $g(1)$ puis déduire le signe de g sur $[0; +\infty[$.
- 5 Soit $f(x) = 2x - 3 + \frac{4}{\sqrt{x}}$ sur $]1; +\infty[$. Montrer que $\forall x > 1, f'(x) = \frac{2g(x)}{x\sqrt{x}}$, étudier les variations de f et démontrer que $\forall x > 1, f(x) > 3$.

3 Dérivée de la composée

Propriété

Soient f dérivable sur I , g dérivable sur J avec $f(I) \subset J$. Alors $g \circ f$ est dérivable sur I et :

$$\forall x \in I, \quad (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Exemple

« Dérivée d'une composée. »

Calculer la dérivée de $h(x) = \cos(\sqrt{x})$ sur $]0; +\infty[$.

Solution. On pose $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = \cos x$. Alors $h = g \circ f$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $g'(x) = -\sin x$:

$$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = -\sin(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}.$$

Application

Calculer la dérivée :

- $f(x) = \sin\left(x^2 - \frac{2}{3}x + 4\right)$
- $g(x) = \cos\left(\frac{4}{x^2 + 4}\right)$
- $h(x) = (x^3 - 2x + 1)^7$
- $k(x) = \sqrt{\sin x + 2}$

À faire à la maison

Calculer la dérivée de chaque fonction sur un intervalle approprié :

- $f_1(x) = \sin\left(\frac{x^2 - 1}{x}\right)$
- $f_2(x) = \cos^3(2x + 1)$
- $f_3(x) = \sqrt{1 + \cos^2 x}$
- $f_4(x) = \tan(\sqrt{x})$
- $f_5(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^4$
- $f_6(x) = \sin(\sin x)$

4 Dérivée de la fonction réciproque

Propriété

Soit f continue et strictement monotone sur un intervalle I , dérivable sur I avec $f' \neq 0$ sur I . Alors f^{-1} est dérivable sur $J = f(I)$ et :

$$\forall x \in J, \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Cas particulier : si $f'(a) \neq 0$, $(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$.

4.1 Dérivée de $\sqrt[n]{x}$ et de $\sqrt[n]{u}$

Conséquences

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

- $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et :

$$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$

- Si u est dérivable et strictement positive sur I :

$$(\sqrt[n]{u(x)})' = \frac{u'(x)}{n \sqrt[n]{(u(x))^{n-1}}}.$$

Exemple

« Dérivée d'une réciproque. »

Soit $f(x) = x^3 + x$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que f^{-1} est dérivable en 2 et calculer $(f^{-1})'(2)$.

Solution. $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ donc f est strictement croissante et dérivable sur $\mathbb{R}$. $f(1) = 1 + 1 = 2$, donc $f^{-1}(2) = 1$. Comme $f'(1) = 4 \neq 0$, f^{-1} est dérivable en 2 et :

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{4}.$$

Application

1 Calculer la dérivée de chaque fonction sur un intervalle approprié :

$$\bullet f(x) = \sqrt[3]{x} \qquad \bullet g(x) = \sqrt[4]{x^3} \qquad \bullet h(x) = \sqrt[3]{x^2 + 2x} \qquad \bullet k(x) = \sqrt[4]{1 + \cos^2 x}$$

2 Calculer (à l'aide de la dérivée) :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x}$$

À faire à la maison

Soit $f(x) = x^3 - 3x - 3$ sur $\mathbb{R}$.

1 Étudier les variations de f .

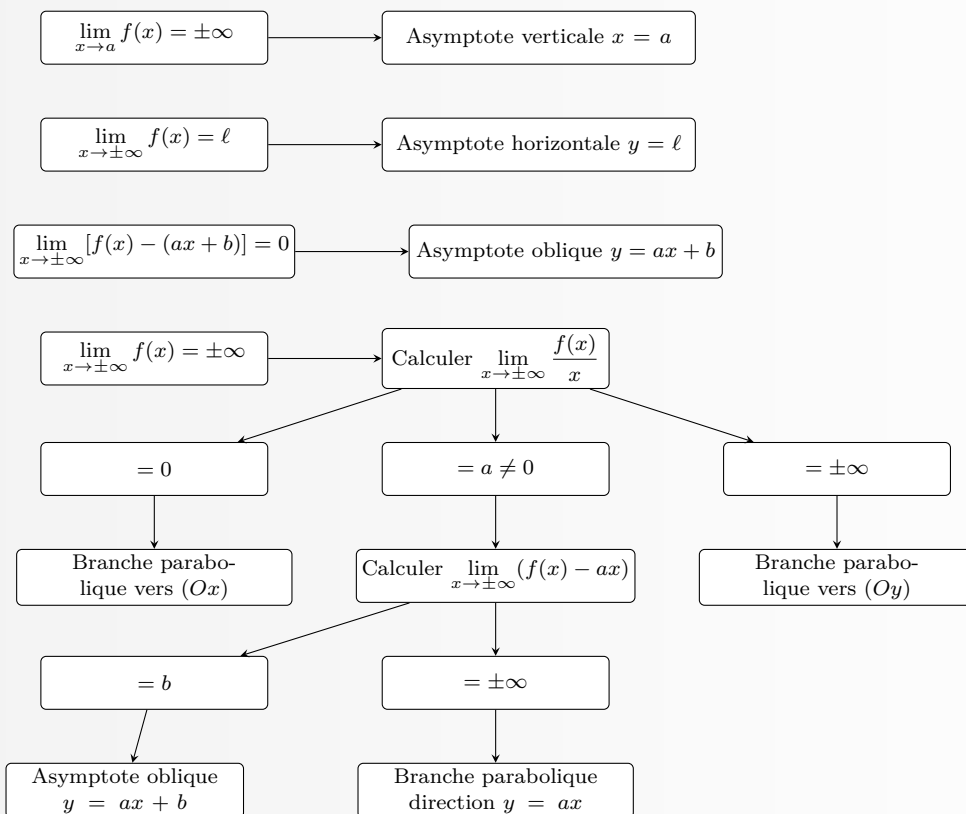
2 Soit g la restriction de f à $[1; +\infty[$.

- Montrer que g admet une réciproque g^{-1} sur un intervalle J à préciser.
- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]1; +\infty[$ et que $2 < \alpha < 3$.
- Calculer $(g^{-1})'(0)$ en fonction de α .

5 Comportement asymptotique

5.1 Schéma récapitulatif

Schéma de l'étude des branches infinies



Exemple

« Détermination d'une asymptote oblique. »

Soit $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x + 2}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Montrer que $(D) : y = x - 1$ est asymptote oblique de (C_f) et étudier la position relative.

Solution. Division euclidienne : $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x + 2}$. Donc :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (x - 1)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x + 2} = 0.$$

Donc (D) est asymptote oblique en $\pm\infty$. **Position** : $f(x) - (x - 1) = \frac{1}{x + 2}$. Si $x > -2$: $f(x) > x - 1$, (C_f) est au-dessus de (D) . Si $x < -2$: (C_f) est en dessous de (D) .

Application

- 1 Pour $f(x) = \frac{3 - 2x^2}{(1 + x)^2}$, déterminer les branches infinies.
- 2 Pour $g(x) = 2x - \sqrt{x}$ sur $[0; +\infty[$, déterminer les branches infinies.

À faire à la maison

Soit $g(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ sur $\mathbb{R}$.

- 1 Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.
- 2 Montrer que $g'(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$ pour tout x , dresser le tableau de variations, et déduire que $g(x) > 0$ pour tout x .
- 3 Soit $f(x) = x - 1 + \sqrt{x^2 + 1}$.
 - a. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; interpréter.
 - b. Montrer que $(D) : y = 2x - 1$ est asymptote oblique à (C_f) en $+\infty$.
 - c. Montrer que $f'(x) = g(x)$ et dresser le tableau de variations de f .

6 Concavité et points d'inflexion

Propriété

Soit f deux fois dérivable sur I .

- Si $f'' \geq 0$ sur I : (C_f) est **convexe** sur I .
- Si $f'' \leq 0$ sur I : (C_f) est **concave** sur I .
- Si $f''(a) = 0$ et f'' change de signe en a : $A(a, f(a))$ est un **point d'inflexion**.

Exemple

« Étude de la concavité. »

Étudier la concavité de $f(x) = x^3 - 3x$ sur $\mathbb{R}$.

Solution. $f'(x) = 3x^2 - 3$, $f''(x) = 6x$. $f''(x) < 0$ sur $] -\infty; 0[$ et $f''(x) > 0$ sur $]0; +\infty[$. Donc (C_f) est concave sur $] -\infty; 0[$ et convexe sur $]0; +\infty[$. f'' change de signe en 0 : $O(0, 0)$ est un point d'inflexion.

Application

Pour $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x + 2}$, étudier la concavité de (C_f) et préciser les points d'inflexion.

À faire à la maison

- 1 Étudier la concavité de chacune des fonctions et préciser les points d'inflexion :
 - $f_1(x) = x^4 - 6x^2$
 - $f_2(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$
 - $f_3(x) = \sqrt{x^2 + 1}$
 - $f_4(x) = \sin x$ sur $[0; 2\pi]$
- 2 Soit $f(x) = \frac{x^3 - 3x}{x^2 + 1}$. Montrer que f admet trois points d'inflexion alignés.

7 Éléments de symétrie

7.1 Axe de symétrie

Propriété

Soit f définie sur D . La droite $\Delta : x = a$ est un **axe de symétrie** de (C_f) ssi :

- $\forall x \in D, 2a - x \in D$.
- $\forall x \in D, f(2a - x) = f(x)$.

7.2 Centre de symétrie

Propriété

Soit f définie sur D . Le point $\Omega(a; b)$ est un **centre de symétrie** de (C_f) ssi :

- $\forall x \in D, 2a - x \in D$.
- $\forall x \in D, f(2a - x) + f(x) = 2b$.

Exemple

« Axe de symétrie. »

Montrer que $(\Delta) : x = 1$ est un axe de symétrie de (C_f) pour $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$.

Solution. $D_f = \mathbb{R}$ (car $x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2 > 0$). Pour $a = 1 : 2a - x = 2 - x$, et $f(2 - x) = \sqrt{(2 - x)^2 - 2(2 - x) + 3} = \sqrt{4 - 4x + x^2 - 4 + 2x + 3} = \sqrt{x^2 - 2x + 3} = f(x)$. Donc Δ est bien un axe de symétrie.

Application

Soit $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x + 2}$.

- 1 Montrer que $\Omega(-2; -3)$ est un centre de symétrie de (C_f) .
- 2 En déduire que l'on peut restreindre l'étude à $] - 2; +\infty[$.

À faire à la maison

Soit $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x + 2}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

- 1 Donner les coordonnées des points d'intersection de (C_f) avec les axes.
- 2 Étudier les variations de f et dresser son tableau.
- 3 Vérifier que $\Omega(-2; -3)$ est un centre de symétrie.
- 4 Soit g la restriction de f à $[-1; +\infty[$. Montrer que g admet une réciproque g^{-1} sur un intervalle J à préciser.
- 5 Tracer $(D) : y = x - 1$, (C_f) et $(C_{g^{-1}})$ dans un même repère orthonormé.

8 Correspondance $(C_f) \leftrightarrow (C_{f^{-1}})$

Les courbes (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ sont symétriques par rapport à la droite $y = x$. Le tableau ci-dessous donne les correspondances entre éléments remarquables.

Courbe (C_f)	Courbe ($C_{f^{-1}}$)
$A(a, b) \in (C_f)$	$A'(b, a) \in (C_{f^{-1}})$
Asymptote verticale $x = a$	Asymptote horizontale $y = a$
Asymptote horizontale $y = b$	Asymptote verticale $x = b$
Asymptote oblique $y = ax + b$	Asymptote oblique $y = \frac{1}{a}x + \frac{b}{a} \quad (a \neq 0)$
Tangente / demi-tangente verticale	Tangente / demi-tangente horizontale
Tangente / demi-tangente horizontale	Tangente / demi-tangente verticale