

Série d'exercices — Dérivation et applications

1^{ère} BAC SX BIOF

En. Nidal SABI

Exercice 1

Pour chaque fonction, étudier la dérivabilité au point indiqué :

1. $f(x) = x^2 + 3x$ en $a = 1$.
2. $f(x) = \sqrt{x}$ en $a = 4$.
3. $f(x) = \frac{1}{x}$ en $a = 2$.
4. $f(x) = |x|$ en $a = 0$.

Exercice 2

Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

- | | | |
|----------------------------------|----------------------------|-----------------------------------|
| 1. $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 5$ | 4. $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$ | 7. $f(x) = \frac{1}{(x^2 - 1)^3}$ |
| 2. $f(x) = (x^2 + 1)(x - 3)$ | 5. $f(x) = \cos(3x + 1)$ | 8. $f(x) = \tan(2x)$ |
| 3. $f(x) = \frac{2x - 1}{x + 1}$ | 6. $f(x) = (2x - 1)^5$ | 9. $f(x) = x^2 \sin x$ |

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f .
3. Donner les coordonnées des extremums locaux de f .

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Dresser le tableau de variations de f .

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.

1. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse $x_0 = 1$.
2. Étudier la position relative de (C_f) et (T) .

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$.
2. Étudier la monotonie de f .
3. Calculer $f''(x)$ et étudier la convexité de f .

Exercice 7

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos x + \sin x$.

1. Calculer $f'(x)$, $f''(x)$ et $f^{(3)}(x)$.
2. Vérifier que f est solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$.

Exercice 8

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' + 16y = 0$
2. $y'' + \frac{1}{4}y = 0$
3. $4y'' + y = 0$
4. $y'' + 25y = 0$

Exercice 9

Une boîte parallélépipédique sans couvercle a une base carrée de côté x et une hauteur h telles que le volume soit $V = 32 \text{ cm}^3$.

1. Exprimer h en fonction de x .
2. Montrer que la surface totale est $S(x) = x^2 + \frac{128}{x}$.
3. Trouver x qui minimise $S(x)$.

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x - 1)^2(x + 2)$.

1. Développer $f(x)$.
2. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
3. Dresser le tableau de variations de f et déterminer ses extremums locaux.

Exercice 11

Soit f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x + \frac{4}{x}$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations.
3. Montrer que f admet un minimum sur $]0, +\infty[$ et donner sa valeur.

Exercice 12

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$.

1. Étudier la parité de f .
2. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
3. Dresser le tableau de variations de f et déterminer le maximum et le minimum de f sur $\mathbb{R}$.