

# Série d'exercices N°1 (S2)

## Dérivation

1<sup>ère</sup> Année Baccalauréat – Sciences Mathématiques

**Consignes.** Préciser à chaque calcul le domaine de dérivabilité. Pour toute monotonie, fournir la table de signe de la dérivée.

**Couverture.** 14 exercices : nombre dérivé, tangentes, calculs de dérivées, étude de variations, extrémums, applications aux limites.

### I. Nombre dérivé et tangente

#### Exercice 1 *Nombre dérivé par définition*

Calculer  $f'(x_0)$  en utilisant la définition  $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ .

1.  $f(x) = 3x^2 - 5x$ , en  $x_0 = 2$ .
2.  $f(x) = \frac{1}{x}$ , en  $x_0 = -1$ .
3.  $f(x) = \sqrt{x}$ , en  $x_0 = 4$ .
4.  $f(x) = \sqrt{2x+1}$ , en  $x_0 = 4$ .

#### Exercice 2 *Tangentes*

Pour chaque fonction, déterminer l'équation de la tangente au point indiqué.

1.  $f(x) = x^3 + 2x - 1$ , en  $x_0 = 1$ .
2.  $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$ , en  $x_0 = 0$ .
3.  $f(x) = \sqrt{x^2+5}$ , en  $x_0 = 2$ .
4.  $f(x) = \sin(2x)$ , en  $x_0 = \frac{\pi}{6}$ .

#### Exercice 3 *Dérivabilité en un point*

Étudier la dérivabilité aux points indiqués.

1.  $f(x) = |x-1|$  en  $x_0 = 1$ .
2.  $f(x) = \sqrt{x}$  en  $x_0 = 0$  (à droite).
3.  $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x-1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$  en  $x_0 = 1$ .
4.  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  en  $x_0 = 0$ . La tangente est-elle verticale ?

## II. Calculs de dérivées

**Exercice 4** *Dérivées sommes, produits, quotients*

Calculer  $f'(x)$  et préciser  $\mathcal{D}_{f'}$  :

1.  $f(x) = 4x^5 - 3x^3 + 2x - 7$ .

2.  $f(x) = (2x + 1)(x^2 - 3)$ .

3.  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 2}$ .

4.  $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + 1}$ .

5.  $f(x) = \frac{1}{x^3 + 1}$ .

6.  $f(x) = \frac{x^2 + x}{(x + 1)^2}$ .

**Exercice 5** *Dérivées de composées*

Calculer  $f'(x)$ .

1.  $f(x) = (3x + 5)^4$ .

2.  $f(x) = (x^2 - 2x + 1)^7$ .

3.  $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x}$ .

4.  $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$ .

5.  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x + 1}}$ .

6.  $f(x) = \sin^3(2x)$ .

7.  $f(x) = \cos(x^2 + 1)$ .

8.  $f(x) = \tan(3x - 1)$ .

## III. Étude de variations

**Exercice 6** *Polynômes*

Étudier les variations et tracer le tableau de variations.

1.  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ .

2.  $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 3$ .

3.  $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$ .

**Exercice 7** *Rationnelles*

Étudier les variations sur  $\mathcal{D}_f$ .

1.  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 1}$ .

2.  $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ .

3.  $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 1}$ .

**Exercice 8** *Avec racines*

1.  $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$  sur  $] -\infty, -2] \cup [2, +\infty[$ .

2.  $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$  sur  $[-2, 2]$ .

3.  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 9** *Trigonométriques*

Étudier les variations sur l'intervalle indiqué.

1.  $f(x) = \sin x - x$  sur  $\mathbb{R}$ .

2.  $f(x) = 2\sin x + \cos(2x)$  sur  $[0, 2\pi]$ .

3.  $f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) + \cos x$  sur  $[0, \pi]$ .

**IV. Extrémums et optimisation****Exercice 10** *Extrémums*

Pour chaque fonction, déterminer les extrémums (locaux et absolus) sur l'intervalle indiqué.

1.  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$  sur  $[-1, 4]$ .

2.  $f(x) = x + \frac{4}{x}$  sur  $]0, +\infty[$ .

3.  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 11** *Problème d'optimisation*

On veut clôturer un terrain rectangulaire de surface  $S = 100 \text{ m}^2$ . On dispose d'une longueur totale de grillage à minimiser.

1. Exprimer la longueur  $L$  du grillage en fonction d'un seul paramètre.

2. Trouver les dimensions optimales pour minimiser  $L$ . Quelle est la longueur minimale ?

**Exercice 12** *Cylindre*

Un cylindre droit a un volume  $V = 1$  litre. On veut minimiser sa surface totale (deux disques + côté).

1. Exprimer la surface  $S$  en fonction du rayon  $r$  uniquement.

2. Étudier  $S(r)$  sur  $]0, +\infty[$ .

3. Trouver le rayon optimal.

**V. Application aux limites****Exercice 13** *Limites par dérivée*

Calculer en reconnaissant un nombre dérivé :

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x}$ .
2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^5 - 1}{x}$ .
3.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{10} - 1}{x - 1}$ .
4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x} - 1}{x}$ .
5.  $\lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{\cos x - 1/2}{x - \pi/3}$ .

**VI. Problème de synthèse****Exercice 14** *Étude complète d'une fonction*

Soit  $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}$ .

1. Déterminer  $\mathcal{D}_f$ .
2. Montrer que  $f(x) = (x + 2) + \frac{1}{x - 1}$ .
3. Étudier les variations de  $f$ .
4. Calculer les limites aux bornes du domaine.
5. Donner l'équation de la tangente à  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse  $x_0 = 2$ .
6. Tracer le tableau de variations complet.

---

*Fin de la série – Dérivation*