

Dérivation

1^{ère} Année Baccalauréat – Sciences Mathématiques

Volume horaire officiel : 10h (cf. répartition 2013) – **Pré-requis** : limites (chapitre 9 S1), fonctions, trigonométrie.

Capacités attendues : approcher une fonction au voisinage d'un point par une fonction affine ; reconnaître que le nombre dérivé est le coefficient directeur de la tangente ; connaître les dérivées des fonctions de référence ; maîtriser les techniques de calcul de dérivée ; déterminer l'équation de la tangente en un point ; déduire la monotonie d'une fonction de l'étude du signe de sa dérivée ; déterminer le signe d'une fonction à partir de son tableau de variations ; résoudre des problèmes d'extrémums ; appliquer la dérivation au calcul de certaines limites.

Table des matières

1	Nombre dérivé	2
1.1	Approche : taux de variation	2
1.2	Nombre dérivé	2
1.3	Interprétation géométrique : tangente	2
1.4	Approche affine au voisinage d'un point	2
1.5	Dérivabilité à gauche et à droite	3
2	Fonction dérivée	4
2.1	Définition	4
2.2	Dérivées des fonctions de référence	4
2.3	Opérations sur les dérivées	4
2.4	Dérivée d'une composée	5
3	Applications de la dérivation	6
3.1	Sens de variation	6
3.2	Extrémums locaux	6
3.3	Tangente horizontale et tangente verticale	7
3.4	Limites par l'inégalité de la dérivée	7
4	Synthèse	8
4.1	Récapitulatif	8
4.2	Pièges classiques	8

1. Nombre dérivé

1.1 Approche : taux de variation

Définition

Définition 1.1 — Soit f définie sur un intervalle I contenant x_0 . Le **taux d'accroissement** de f entre x_0 et $x_0 + h$ (avec $x_0 + h \in I$, $h \neq 0$) est :

$$\tau(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

1.2 Nombre dérivé

Définition

Définition 1.2 — On dit que f est **dérivable en** x_0 s'il existe un nombre réel ℓ tel que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \ell.$$

Ce nombre ℓ est appelé le **nombre dérivé** de f en x_0 , noté $f'(x_0)$.

De manière équivalente, en posant $x = x_0 + h$:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

1.3 Interprétation géométrique : tangente

Théorème

Théorème 1.1 — Si f est dérivable en x_0 , la courbe $\mathcal{C}_f$ admet en son point $A(x_0, f(x_0))$ une **tangente** dont le coefficient directeur est $f'(x_0)$. Son équation est :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Exemple

Exemple 1.1 — Soit $f(x) = x^2$ en $x_0 = 3$.

$$\frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \frac{(3+h)^2 - 9}{h} = \frac{6h + h^2}{h} = 6 + h \xrightarrow{h \rightarrow 0} 6.$$

Donc $f'(3) = 6$. Tangente en $(3, 9)$: $y = 6(x - 3) + 9 = 6x - 9$.

1.4 Approche affine au voisinage d'un point

Propriété

Propriété 1.1 — Si f est dérivable en x_0 , alors au voisinage de x_0 :

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

La fonction affine $x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ est la meilleure **approximation affine** de f près de x_0 .

1.5 Dérivabilité à gauche et à droite

Définition

Définition 1.3 — On note :

$$f'_d(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad ; \quad f'_g(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

f est dérivable en x_0 ssi $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.

Exemple

Exemple 1.2 — Soit $f(x) = |x|$ en $x_0 = 0$.

$$f'_d(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = 1, \quad f'_g(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = -1.$$

Les deux dérivées latérales sont différentes : $|x|$ n'est pas dérivable en 0. Le point $(0, 0)$ est un **point anguleux** de $\mathcal{C}_f$.

2. Fonction dérivée

2.1 Définition

Définition

Définition 2.1 — f est dite **dérivable sur un intervalle** I si f est dérivable en chaque point de I . La **fonction dérivée** de f , notée f' , est l'application $x \mapsto f'(x)$ définie sur I .

2.2 Dérivées des fonctions de référence

Théorème

Théorème 2.1 — Les fonctions usuelles sont dérivables sur l'intervalle indiqué, et :

Fonction $f(x)$	Dérivée $f'(x)$	Domaine de dérivabilité
c (constante)	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
x^n ($n \in \mathbb{N}^*$)	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$

Démonstration

Cas $f(x) = x^2$. $\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h \xrightarrow{h \rightarrow 0} 2x$. Donc $f'(x) = 2x$.

Cas $f(x) = \sqrt{x}$ **sur** $]0, +\infty[$. On utilise la quantité conjuguée :

$$\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Cas $f(x) = \sin x$. Avec la formule $\sin(x+h) - \sin x = 2 \sin\left(\frac{h}{2}\right) \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)$:

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin(h/2)}{h/2} \cdot \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 1 \cdot \cos x = \cos x.$$

□

2.3 Opérations sur les dérivées

Théorème

Théorème 2.2 — Soient u, v dérivables sur I , $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

Fonction	Dérivée
$u + v$	$u' + v'$
λu	$\lambda u'$
uv	$u'v + uv'$
$\frac{1}{v}$ (si $v \neq 0$)	$-\frac{v'}{v^2}$
$\frac{u}{v}$ (si $v \neq 0$)	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
u^n ($n \in \mathbb{N}^*$)	$nu^{n-1}u'$
$\sqrt{u}$ (si $u > 0$)	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

Démonstration

Dérivée d'un produit uv .

$$\frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} = \frac{u(x+h) - u(x)}{h}v(x+h) + u(x)\frac{v(x+h) - v(x)}{h}.$$

Quand $h \rightarrow 0$: $u(x+h) \rightarrow u(x)$ (car u continue car dérivable), $\frac{u(x+h)-u(x)}{h} \rightarrow u'(x)$, $\frac{v(x+h)-v(x)}{h} \rightarrow v'(x)$.

Limite : $u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$. □

2.4 Dérivée d'une composée

Théorème

Théorème 2.3 — Soient f dérivable sur I et g dérivable sur $J \supset f(I)$. Alors $g \circ f$ est dérivable sur I , et :

$$(g \circ f)'(x) = f'(x) \cdot g'(f(x)).$$

Exemple

Exemple 2.1 — Soit $h(x) = \sin(3x^2 + 1)$. Posons $u(x) = 3x^2 + 1$ et $v(t) = \sin t$. Alors $h = v \circ u$, et :

$$h'(x) = u'(x) \cdot v'(u(x)) = 6x \cdot \cos(3x^2 + 1).$$

Propriété

Propriété 2.1 — Cas particuliers fréquents :

$$(\sin(ax + b))' = a \cos(ax + b) \quad ; \quad (\cos(ax + b))' = -a \sin(ax + b).$$

$$(u(x)^n)' = nu'(x)u(x)^{n-1} \quad ; \quad (\sqrt{u(x)})' = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}.$$

3. Applications de la dérivation

3.1 Sens de variation

Théorème

Théorème 3.1 — Soit f dérivable sur un intervalle I .

- Si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$, alors f est **croissante** sur I .
- Si $f'(x) \geq 0$ sur I et f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points, alors f est **strictement croissante** sur I .
- Si $f'(x) \leq 0$ sur I , f est décroissante sur I ; si en plus f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points, f est strictement décroissante.
- Si $f'(x) = 0$ sur I , f est constante sur I .

Méthode

Pour étudier les variations de f :

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$ et le domaine de dérivabilité.
2. Calculer $f'(x)$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$.
4. Dresser le tableau de variations.

Exemple

Exemple 3.1 — Étudier les variations de $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

Solution. $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$.

Signe : $f'(x) > 0$ sur $] -\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, $f'(x) < 0$ sur $] -1, 1[$.

Tableau :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$-$	$+$
f	$-\infty$	$\nearrow$ 4	$\searrow$ 0	$\nearrow$ $+\infty$

f admet un **maximum local** 4 en $x = -1$, et un **minimum local** 0 en $x = 1$.

3.2 Extrémums locaux

Théorème

Théorème 3.2 — Soit f dérivable sur I et x_0 intérieur à I .

Si f admet un **extremum local** en x_0 , alors $f'(x_0) = 0$.

Attention : la réciproque est fautive en général (cf. $f(x) = x^3$, $f'(0) = 0$ sans extremum).

Condition suffisante : si $f'(x_0) = 0$ et f' change de signe en x_0 , alors f admet un extremum en x_0 .

3.3 Tangente horizontale et tangente verticale

Remarque

- Si $f'(x_0) = 0$: la tangente en $(x_0, f(x_0))$ est **horizontale**.
- Si $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \pm\infty$: la tangente est **verticale** en x_0 .

3.4 Limites par reconnaissance d'un nombre dérivé

Méthode

On peut parfois utiliser la définition de la dérivée pour calculer une limite. Si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell$, alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \ell$.

Réciproquement, certaines limites se reconnaissent comme des nombres dérivés.

Exemple

Exemple 3.2 — Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x}$.

Solution. Posons $f(x) = \sin(2x)$. Alors $f(0) = 0$ et $\frac{\sin(2x)}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$.

Comme $f'(x) = 2 \cos(2x)$, $f'(0) = 2$. Donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x} = 2$.

4. Synthèse

4.1 Récapitulatif

Notion	Définition / formule
Nombre dérivé	$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
Tangente en x_0	$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
Approximation affine	$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
Dérivée de $u + v$	$u' + v'$
Dérivée de uv	$u'v + uv'$
Dérivée de u/v	$(u'v - uv')/v^2$
Dérivée de $g \circ f$	$f'(x) \cdot g'(f(x))$
Dérivée de u^n	$nu^{n-1}u'$
Dérivée de $\sqrt{u}$	$u'/(2\sqrt{u})$
Monotonie	$f' \geq 0 \Rightarrow f$ croissante
Extrémum local	$f'(x_0) = 0$ et f' change de signe en x_0

4.2 Pièges classiques

Remarque

1. **Confondre dérivée et fonction.** f' est une fonction, pas une valeur.
2. **Dérivée de $\sqrt{u}$ sans $u > 0$.** La formule exige strictement $u > 0$.
3. **Dériver une composée sans $g'(f(x))$.** Erreur courante : oublier de « remettre $f(x)$ » dans g' .
4. **Réciproque du critère d'extremum.** $f'(x_0) = 0$ n'implique pas extremum (cf. x^3).
5. **Confondre $f'(x_0)$ et la valeur de la fonction f .**