

1 Dérivabilité d'une fonction en un point

1.1 Nombre dérivé

Definition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $a \in I$. On dit que f est **dérivable en a** s'il existe un réel L tel que :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L$$

Le réel L est appelé **nombre dérivé** de f en a , noté $f'(a)$.

Exemple

Soit $f(x) = x^2$ et $a = 1$. Pour $x \neq 1$:

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$. Ainsi f est dérivable en 1 et $f'(1) = 2$.

Application

Montrer que f est dérivable en a et déterminer $f'(a)$:

1 $f(x) = x^2$; $a = \sqrt{2}$

2 $f(x) = x^3$; $a = 1$

1.2 Tangente à la courbe représentative

Definition

Soit f dérivable en $a \in I$. La **tangente** à la courbe de f au point $A(a; f(a))$ est la droite de coefficient directeur $f'(a)$. Son équation est :

$$(T) : y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Exemple

Soit $f(x) = x^2$, $a = 1$: $f'(1) = 2$ et $f(1) = 1$. L'équation de la tangente en $A(1; 1)$ est :

$$(T) : y = 2(x - 1) + 1 = 2x - 1$$

Application

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - x^2$. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.

1.3 Dérivabilité à droite et à gauche

Definition

1 f est **dérivable à droite** en a si :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L \in \mathbb{R}$$

On note ce réel $f'_d(a)$.

2 f est **dérivable à gauche** en a si :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L \in \mathbb{R}$$

On note ce réel $f'_g(a)$.

Propriété

f est dérivable en a **si et seulement si** elle est dérivable à droite et à gauche en a , et $f'_d(a) = f'_g(a)$.

Exemple

Soit $f(x) = |x|$, $a = 0$. Pour $x > 0$, $|x| = x$, donc :

$$f'_d(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1$$

Pour $x < 0$, $|x| = -x$, donc :

$$f'_g(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x} = -1$$

Comme $f'_d(0) \neq f'_g(0)$, f n'est **pas dérivable** en 0.

Application

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Étudier la dérivabilité de f en 0.

1.4 Approximation affine locale

Definition

Soit f dérivable en $a \in I$. La fonction $x \mapsto f'(a)(x - a) + f(a)$ est appelée **fonction affine tangente** de f en a . Une **approximation affine** de f au voisinage de a est donnée par :

$$f(x) \approx f'(a)(x - a) + f(a)$$

Exemple

Soit $f(x) = x^2$, $a = 1$. On a $f'(1) = 2$, donc au voisinage de 1 :

$$f(x) \approx 2(x - 1) + 1 = 2x - 1$$

On en déduit : $(1,001)^2 \approx 2 \times 1,001 - 1 = 1,002$.

Application

Soit $f(x) = (x + 1)^2$.

- 1 Montrer que f est dérivable en $a = 0$ et en $b = 1$.
- 2 Expliciter les fonctions affines tangentes de f en a et en b .
- 3 Donner une approximation affine de $(1,0004)^2$ et de $(2,00001)^2$.

2 Fonction dérivée Opérations et formules

2.1 Fonction dérivée et dérivées usuelles

Definition

Soit f dérivable sur I . La **fonction dérivée** de f , notée f' , est définie sur I par :

$$f' : x \longmapsto f'(x)$$

Remarque

Tableau des dérivées usuelles

La fonction f	D_f	La fonction f'	$D_{f'}$
c (constante)	$\mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
x^n ($n \in \mathbb{N}^*$)	$\mathbb{R}$	$n x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

2.2 Opérations sur les fonctions dérivées

Propriété

Soient u et v deux fonctions dérivables sur I et $k \in \mathbb{R}$. Alors :

- $(u + v)' = u' + v'$
- $(k u)' = k u'$
- $(u \times v)' = u'v + uv'$
- Si v ne s'annule pas sur I : $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$ et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Propriété

- Toute **fonction polynôme** est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$.
- Toute **fonction rationnelle** est dérivable en tout point de son ensemble de définition.

Exemple

Soit $f(x) = x^2 \sin(x)$. On pose $u = x^2$, $v = \sin(x)$:

$$f'(x) = 2x \sin(x) + x^2 \cos(x)$$

Application

Déterminer la dérivée de f :

1 $f(x) = (2x - 3)(x^2 - 5x)$

2 $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

3 $f(x) = x^3 \cos(x)$

2.3 Dérivée de fonctions composées

Propriété

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et u une fonction dérivable sur un intervalle J . La fonction $x \mapsto u(ax + b)$ est dérivable sur tout intervalle I tel que $ax + b \in J$ pour tout $x \in I$, et :

- Si $u > 0$ sur J : $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$: $(u^n)' = n u' u^{n-1}$
- $(u(ax + b))' = a u'(ax + b)$

Remarque

Conséquences fonctions trigonométriques composées

La fonction f	D_f	La fonction f'	$D_{f'}$
$\cos(ax + b)$	$\mathbb{R}$	$-a \sin(ax + b)$	$\mathbb{R}$
$\sin(ax + b)$	$\mathbb{R}$	$a \cos(ax + b)$	$\mathbb{R}$
$\tan(ax + b)$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\frac{\pi}{2} + k\pi - b}{a}, k \in \mathbb{Z} \right\}$	$a(1 + \tan^2(ax + b))$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\frac{\pi}{2} + k\pi - b}{a}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

Exemple

Soit $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$. On pose $u = x^2 + 1 > 0$ sur $\mathbb{R}$, donc :

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Application

Déterminer la dérivée de f :

1 $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$

2 $f(x) = (x^2 - 3x + 1)^4$

3 $f(x) = \cos(2x - 3)$

2.4 Dérivées successives

Définition

Soit f deux fois dérivable sur I . On note $f'' = (f')' = f^{(2)}$ la **dérivée seconde** de f . Par itération, on définit la **dérivée d'ordre n** par :

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)} \right)'$$

Exemple

Soit $f(x) = x^3 - 2x$:

$$f'(x) = 3x^2 - 2 \quad f''(x) = 6x \quad f'''(x) = 6$$

Application

Déterminer les dérivées d'ordre 1, 2 et 3 :

1 $f(x) = x^3 + 4x^2 - 6$

2 $f(x) = \cos(x) + \sin(x)$

3 Applications de la dérivation

3.1 Sens de variation d'une fonction

Propriété

Soit f dérivable sur un intervalle I :

- 1 $f' > 0$ sur I (sauf en un nombre fini de points) $\iff f$ est **strictement croissante** sur I .
- 2 $f' < 0$ sur I (sauf en un nombre fini de points) $\iff f$ est **strictement décroissante** sur I .
- 3 $f' = 0$ sur I $\iff f$ est **constante** sur I .

Exemple

Soit $f(x) = x^2 - 2x$ sur $\mathbb{R}$. $f'(x) = 2x - 2$.

- $f'(x) < 0 \iff x < 1$: f est **strictement décroissante** sur $] -\infty ; 1]$.
- $f'(x) > 0 \iff x > 1$: f est **strictement croissante** sur $[1 ; +\infty[$.

Application

Soit $f(x) = (x - 1)^3$.

- 1 Calculer $f'(x)$.
- 2 Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.

3.2 Extremums d'une fonction

Propriété

Soit f dérivable sur I et $\alpha \in I$.

- Si f admet un **extremum** en α , alors $f'(\alpha) = 0$.
- Si $f'(\alpha) = 0$ et f' **change de signe** en α :
 - f' passe de $-$ à $+$: **minimum local** en α .
 - f' passe de $+$ à $-$: **maximum local** en α .

Remarque

Si $f'(\alpha) = 0$ mais f' **ne change pas de signe** en α , alors f n'admet **pas d'extremum** en α (point d'inflexion à tangente horizontale).

Exemple

Soit $f(x) = -x^2 + 4x$. $f'(x) = -2x + 4$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$. f' passe de $+$ à $-$ en 2, donc f admet un **maximum local** en 2 : $f(2) = 4$.

Application

Soit $f(x) = 3x - x^3$.

- 1 Dresser le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}$.
- 2 Déterminer les éventuels extremums de f et préciser leur nature.

3.3 Équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$

Définition

Soit $\omega \in \mathbb{R}^*$. L'équation $y'' + \omega^2 y = 0$, où y est une fonction inconnue de x , est une **équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants**.

Toute fonction f vérifiant $f''(x) + \omega^2 f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ est appelée **solution** de cette équation.

Propriété

L'ensemble des solutions de $y'' + \omega^2 y = 0$ est l'ensemble des fonctions :

$$x \mapsto A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x) \quad (A, B \in \mathbb{R})$$

Remarque

On peut aussi écrire la solution générale sous la forme $x \mapsto A \cos(\omega x + B)$ ou $x \mapsto A \sin(\omega x + B)$, avec $A, B \in \mathbb{R}$.

Exemple

Résoudre $y'' + 4y = 0$.

On identifie $\omega^2 = 4$, donc on choisit $\omega = 2 > 0$. La solution générale est :

$$y = A \cos(2x) + B \sin(2x), \quad A, B \in \mathbb{R}$$

Application

Résoudre les équations différentielles :

1 $y'' + 9y = 0$

2 $\frac{d^2 u(t)}{dt^2} + 2u(t) = 0$