

Table des matières

1	Repère du plan	1	3.2	Coordonnées du milieu d'un segment	4
1.1	Définition d'un repère	1	4	Norme et distance (repère orthonormé)	4
1.2	Coordonnées d'un point	1	5	Équations d'une droite	5
2	Coordonnées d'un vecteur	2	5.1	Vecteur directeur d'une droite	5
2.1	Définition des coordonnées	2	5.2	Équation cartésienne	5
2.2	Opérations en coordonnées	3	5.3	Équation paramétrique	6
3	Colinéarité et milieu	3	5.4	Coefficient directeur et équation réduite	6
3.1	Colinéarité de deux vecteurs	3	5.5	Droite passant par deux points	7
			6	Position relative de deux droites	7
			7	Lecture graphique	8

1 Repère du plan

1.1 Définition d'un repère

DÉFINITION 1

Soient O un point du plan et $(\vec{i}, \vec{j})$ deux vecteurs non colinéaires.
Le triplet $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est appelé un **repère** du plan.

- O est l'**origine** du repère.
- $(\vec{i}, \vec{j})$ est la **base** du repère.

DÉFINITION

Le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est dit :

- **orthogonal** si $\vec{i} \perp \vec{j}$.
- **normé** si $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$.
- **orthonormé** s'il est à la fois orthogonal et normé.

1.2 Coordonnées d'un point

DÉFINITION

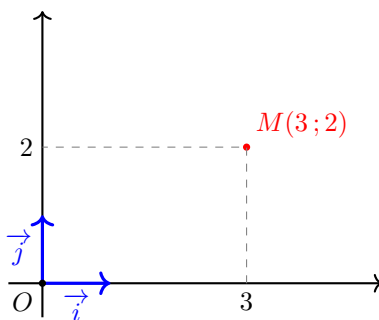
Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan et M un point du plan.
Il existe un unique couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\overrightarrow{OM} = x \vec{i} + y \vec{j}.$$

Le couple (x, y) est appelé **coordonnées** du point M dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$:

- x est l'**abscisse** de M .
- y est l'**ordonnée** de M .

On note $M(x; y)$ ou $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.



EXEMPLE

Dans un repère, $A(3; 1)$ et $B(-1; 4)$. Exprimer $\overrightarrow{AB}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

EXERCICE

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on donne $A(2; 3)$, $B(-1; 1)$ et $C(4; -2)$.

- 1 Placer les points A , B et C .
- 2 Déterminer les coordonnées du point D tel que $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.
- 3 Déterminer les coordonnées du point E tel que $\overrightarrow{OE} = 2\overrightarrow{OC}$.

2 Coordonnées d'un vecteur

2.1 Définition des coordonnées

DÉFINITION 2

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan. Dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, il existe un unique couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\vec{u} = x \vec{i} + y \vec{j}.$$

Le couple (x, y) est appelé **coordonnées** du vecteur $\vec{u}$. On note $\vec{u}(x; y)$ ou $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

PROPRIÉTÉ 1

Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan. Alors :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}.$$

EXEMPLE

Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ pour $A(2; -1)$ et $B(5; 3)$.

2.2 Opérations en coordonnées

PROPRIÉTÉ 2

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs et $k \in \mathbb{R}$.

- $\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$.
- $k \vec{u} \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.
- $\vec{u} = \vec{v} \iff x = x' \text{ et } y = y'$.

EXEMPLE

Pour $\vec{u}(2; -3)$ et $\vec{v}(1; 4)$, calculer $\vec{u} + \vec{v}$ et $3\vec{u} - 2\vec{v}$.

EXERCICE

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on donne $A(2; -1)$, $B(5; 3)$ et $C(-1; 2)$.

- 1 Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
- 2 Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
- 3 Déterminer les coordonnées du point D tel que $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$.

3 Colinéarité et milieu

3.1 Colinéarité de deux vecteurs

THÉORÈME 1

Critère du déterminant.

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement si :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - yx' = 0.$$

REMARQUE

On note souvent : $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$.

EXEMPLE

Étudier la colinéarité de $\vec{u}(2; 3)$ et $\vec{v}(-4; -6)$.

PROPRIÉTÉ

Trois points A , B et C du plan sont **alignés** si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, c'est-à-dire :

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0.$$

EXEMPLE

Les points $A(1; 2)$, $B(3; 5)$ et $C(7; 11)$ sont-ils alignés ? Justifier par un déterminant.

3.2 Coordonnées du milieu d'un segment**PROPRIÉTÉ 3**

Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan.
Les coordonnées du milieu I du segment $[AB]$ sont :

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right).$$

EXEMPLE

Déterminer les coordonnées du milieu de $[AB]$ lorsque $A(2; -3)$ et $B(6; 5)$.

EXERCICE

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on donne $A(1; 2)$, $B(4; 8)$ et $C(-2; -4)$.

- 1** Montrer que les points A , B et C sont alignés.
- 2** Montrer que A est le milieu du segment $[BC]$.
- 3** Les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \end{pmatrix}$ sont ils colinéaires ?

4 Norme et distance (repère orthonormé)**THÉORÈME 2**

Dans un repère **orthonormé** $(O; \vec{i}, \vec{j})$, si $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

PROPRIÉTÉ

Dans un repère orthonormé, si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$, alors :

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

EXEMPLE

Dans un repère orthonormé, calculer AB pour $A(1;2)$ et $B(4;6)$.

EXERCICE

Le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est orthonormé. On donne $A(1;1)$, $B(4;5)$ et $C(-3;4)$.

- 1 Calculer AB , AC et BC .
- 2 Le triangle ABC est-il isocèle?
- 3 Montrer que le triangle ABC est rectangle en A .

5 Équations d'une droite

5.1 Vecteur directeur d'une droite

DÉFINITION 3

Soit (D) une droite du plan passant par deux points distincts A et B .

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est appelé un **vecteur directeur** de la droite (D) .

Plus généralement, tout vecteur $\vec{u}$ non nul et colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de (D) .

PROPRIÉTÉ

Un point M appartient à la droite (D) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

5.2 Équation cartésienne

THÉORÈME 3

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan.

Toute droite (D) du plan admet une équation de la forme :

$$ax + by + c = 0,$$

où $(a, b) \neq (0, 0)$. Cette équation est appelée une **équation cartésienne** de la droite (D) .

Réciproquement, l'ensemble des points $M(x; y)$ vérifiant $ax + by + c = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$ est une droite du plan.

PROPRIÉTÉ 4

Si (D) admet pour équation cartésienne $ax + by + c = 0$, alors un **vecteur directeur** de (D) est :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}.$$

EXEMPLE

Donner un vecteur directeur de la droite $2x - 3y + 6 = 0$ et vérifier qu'il convient.

5.3 Équation paramétrique

THÉORÈME 4

Soit (D) la droite passant par $A(x_A; y_A)$ de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

Un point $M(x; y)$ appartient à (D) si et seulement s'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Ce système est appelé **représentation paramétrique** de la droite (D) .

EXEMPLE

Déterminer une représentation paramétrique puis une équation cartésienne de la droite passant par $A(1; -2)$ et dirigée par $\vec{u}(2; 3)$.

5.4 Coefficient directeur et équation réduite

DÉFINITION 4

Soit (D) une droite **non verticale** (c'est-à-dire non parallèle à l'axe des ordonnées).

Si $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (D) (avec $\alpha \neq 0$), on appelle **coefficient directeur** (ou *pente*) de (D) le réel :

$$m = \frac{\beta}{\alpha}.$$

THÉORÈME 5

Toute droite (D) non verticale admet une équation de la forme :

$$y = mx + p,$$

où m est le coefficient directeur et p l'**ordonnée à l'origine**. Cette équation est appelée **équation réduite** de (D) .

REMARQUE

- Toute droite *verticale* a une équation de la forme $x = k$ (où $k \in \mathbb{R}$). Elle n'admet pas d'équation réduite.
- Toute droite *horizontale* a une équation de la forme $y = k$, soit $m = 0$.

EXEMPLE

Mettre $2x - 3y + 6 = 0$ sous forme réduite et lire son coefficient directeur et son ordonnée à l'origine.

5.5 Droite passant par deux points

PROPRIÉTÉ

Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points distincts du plan tels que $x_A \neq x_B$.
La droite (AB) a pour coefficient directeur :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

EXEMPLE

Déterminer l'équation réduite de la droite passant par $A(1; 2)$ et $B(4; 8)$.

EXERCICE

- 1 Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) passant par $A(1; 2)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.
- 2 Déterminer l'équation réduite de la droite (AB) , où $A(-1; 5)$ et $B(2; -1)$.
- 3 Le point $C(4; -5)$ appartient-il à la droite (AB) ?

6 Position relative de deux droites

THÉORÈME 6

Soient (D) et (D') deux droites du plan, de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$. Alors :

- (D) et (D') sont **parallèles** si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires.
- (D) et (D') sont **sécantes** si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ ne sont pas colinéaires.

PROPRIÉTÉ

Soient $(D) : ax + by + c = 0$ et $(D') : a'x + b'y + c' = 0$ deux droites.

- $(D) \parallel (D') \iff ab' - a'b = 0$.
- (D) et (D') **sécantes** $\iff ab' - a'b \neq 0$.

PROPRIÉTÉ

Pour les équations réduites $(D) : y = mx + p$ et $(D') : y = m'x + p'$:

- $(D) \parallel (D') \iff m = m'$.
- $(D) = (D') \iff m = m' \text{ et } p = p'$.

EXEMPLE

Étudier la position relative de $(D) : 2x - 3y + 1 = 0$ et $(D') : 4x - 6y + 5 = 0$.

EXEMPLE

Déterminer graphiquement puis algébriquement le point d'intersection de $x + y - 3 = 0$ et $2x - y - 3 = 0$.

EXERCICE

Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(-1; 3)$, $B(5; 1)$, $C(2; -3)$.

- 1 Déterminer les coordonnées du milieu I de $[AB]$.
- 2 Calculer la distance AB .
- 3 Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) .
- 4 Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par C et parallèle à (AB) .

EXERCICE

Soient $(D_1) : 3x - 2y + 1 = 0$ et $(D_2) : 6x - 4y - 5 = 0$.

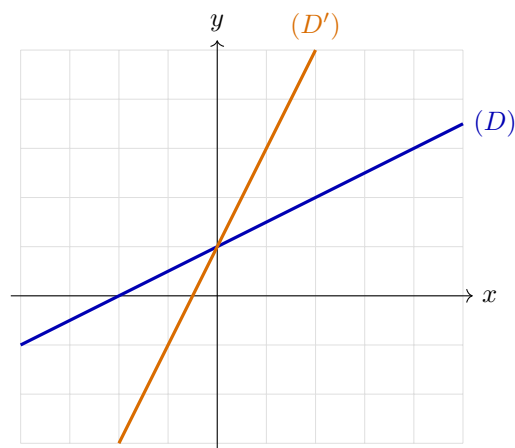
- 1 Donner un vecteur directeur de chacune de ces droites.
- 2 Étudier la position relative de (D_1) et (D_2) .

EXERCICE

Soit (D) la droite passant par $A(2; -1)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

- 1 Donner une représentation paramétrique de (D) .
- 2 En déduire une équation cartésienne de (D) .
- 3 Le point $B(0; 5)$ appartient-il à (D) ?

7 Lecture graphique



EXEMPLE

Lire graphiquement deux points de chaque droite, estimer leurs coefficients directeurs et leur point d'intersection, puis retrouver leurs équations.