

Série d'exercices N°2

Ensembles et Applications

1^{ère} Année Baccalauréat – Sciences Mathématiques

Consignes. Les exercices sont organisés en 4 parties par notion (ensembles, opérations, applications, composition). Pour toute égalité d'ensembles, privilégier la démonstration par double inclusion.

Couverture. 16 exercices : extension/compréhension, inclusion, ensemble des parties, opérations $\cap, \cup, \setminus, \Delta$, produit cartésien, image directe/réciproque, injection/surjection/bijection, composition, décomposition.

I. Notations et inclusion

Exercice 1 *Extension / compréhension*

1. Écrire en extension :

- (a) $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n(n-3) \leq 0\}$.
- (b) $B = \{k \in \mathbb{Z} \mid k^2 + k - 6 = 0\}$.
- (c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid (x-1)(x^2-4) = 0\}$.
- (d) $D = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ divise } 18\}$.

2. Écrire en compréhension (en partant de $\mathbb{R}, \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{N}$ selon le cas) :

- (a) $E_1 = \{0; 3; 8; 15; 24; 35; \dots\}$.
- (b) $E_2 = \{-5; -3; -1; 1; 3; 5\}$.
- (c) $E_3 = \{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \dots\}$.

Exercice 2 *Inclusion et égalité par double inclusion*

Soient $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 \geq 0\}$ et $B =]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$.

1. Montrer que $A = B$ par double inclusion.
2. Soit $C = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 + 2n \geq 8\}$. Écrire C en extension (justifier).
3. Soient $X = \{6k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ et $Y = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\} \cap \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Démontrer $X = Y$.

Exercice 3 *Ensemble des parties*

1. Soit $E = \{a, b, c\}$. Donner explicitement $\mathcal{P}(E)$. Vérifier que $|\mathcal{P}(E)| = 2^3$.
2. Soit F un ensemble tel que $|\mathcal{P}(F)| = 32$. Combien d'éléments compte F ?
3. Vrai ou faux ? (justifier) :
 - (a) $\emptyset \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$.
 - (b) $\{\emptyset\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$.
 - (c) Si $A \subset B$ alors $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$.
 - (d) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
4. Soient $A, B \subset E$. Démontrer que $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

II. Opérations sur les ensembles

Exercice 4 *Calculs explicites*

Dans l'univers $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, on pose

$$A = \{1, 2, 4, 5, 7\} \quad ; \quad B = \{2, 3, 5, 8\} \quad ; \quad C = \{4, 5, 6, 7\}.$$

1. Calculer $A \cap B$, $A \cup B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \triangle B$.
2. Calculer $A \cap (B \cup C)$ et $(A \cap B) \cup (A \cap C)$; vérifier l'égalité.
3. Calculer $\overline{A \cup B}$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$; vérifier la loi de De Morgan.
4. Calculer $(A \triangle B) \triangle C$ et $A \triangle (B \triangle C)$; conjecturer une propriété et la nommer.

Exercice 5 *Démonstrations ensemblistes*

Soient A, B, C trois parties d'un ensemble E . Démontrer par double inclusion (ou en utilisant les caractérisations logiques) :

1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
2. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (seconde loi de De Morgan).
3. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.
4. $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Exercice 6 *Inclusion et opérations*

Soient A, B, C des parties d'un ensemble E .

1. Montrer que $A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$.
2. Montrer que $A \subset B \Leftrightarrow A \cap \overline{B} = \emptyset$.
3. En déduire que $A \subset B \Leftrightarrow A \setminus B = \emptyset$.
4. Démontrer : si $A \subset C$ et $B \subset C$, alors $A \cup B \subset C$.

Exercice 7 *Système ensembliste*

Soient A et B deux parties d'un ensemble E . On suppose :

$$A \cup B = E \quad \text{et} \quad A \cap B = \emptyset.$$

1. Démontrer que $B = \overline{A}$.
2. Réciproquement, montrer que A et $\overline{A}$ vérifient toujours ces deux égalités.
3. Conclure : caractériser la situation décrite.

Exercice 8 *Différence symétrique : propriétés algébriques*

Soient A, B, C des parties d'un ensemble E . Démontrer :

1. $A \triangle B = B \triangle A$ (commutativité).
2. $A \triangle \emptyset = A$ et $A \triangle A = \emptyset$.
3. $A \triangle B = \overline{A} \triangle \overline{B}$.
4. Si $A \triangle B = A \triangle C$, alors $B = C$ (simplification).

$$5. A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C).$$

III. Produit cartésien

Exercice 9 *Calculs et propriétés*

1. Soient $E = \{1, 2\}$ et $F = \{x, y, z\}$. Donner explicitement $E \times F$, $F \times E$, E^2 , F^2 . Quels sont les cardinaux ?
2. Représenter dans le plan le produit $[-1, 2] \times [0, 3]$ et le produit $\{-1, 0, 1\} \times [0, 1]$.
3. Soient $A_1, A_2 \subset E$ et $B \subset F$. Démontrer :

$$(A_1 \cup A_2) \times B = (A_1 \times B) \cup (A_2 \times B).$$

4. Démontrer : $(A_1 \cap A_2) \times B = (A_1 \times B) \cap (A_2 \times B)$.
5. Soient E, F non vides. Montrer que $E \times F = F \times E \Leftrightarrow E = F$.

IV. Applications, image directe et réciproque

Exercice 10 *Image directe et image réciproque – calculs*

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 - 4x + 3$.

1. Vérifier que $f(x) = (x - 1)(x - 3)$.
2. Calculer $f^{-1}(\{0\})$ et $f^{-1}(\{-1\})$.
3. Déterminer $f^{-1}([0, +\infty[)$.
4. Déterminer $f([0, 4])$. (*Indication* : compléter le carré.)
5. Calculer $f([1, 3])$ et $f^{-1}([-1, 0])$.

Exercice 11 *Propriétés générales*

Soit $f : E \rightarrow F$ une application, $A, A' \subset E$, $B, B' \subset F$. Démontrer :

1. $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$.
2. $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$. Donner un contre-exemple explicite à l'égalité.
3. $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$.
4. $f^{-1}(\overline{B}) = \overline{f^{-1}(B)}$ (complémentaires dans F et E respectivement).
5. $A \subset f^{-1}(f(A))$. Donner un exemple où l'inclusion est stricte.
6. $f(f^{-1}(B)) \subset B$. Donner un exemple où l'inclusion est stricte.

V. Injection, surjection, bijection

Exercice 12 *Caractérisation et étude*

Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de chacune des applications suivantes. Pour les bijections, expliciter la réciproque.

1. $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 4x - 7$.
2. $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + 1$.
3. $f_3 : \mathbb{R}_+ \rightarrow [1, +\infty[, x \mapsto x^2 + 1$.
4. $f_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3 + x$.
5. $f_5 : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\}, x \mapsto \frac{2x+1}{x-1}$.
6. $f_6 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto \begin{cases} n+1 & \text{si } n \text{ pair} \\ n-1 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$.

Exercice 13 *Conditions et caractérisations*

Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

1. Montrer que f est injective $\Leftrightarrow (\forall A \subset E) f^{-1}(f(A)) = A$.
2. Montrer que f est surjective $\Leftrightarrow (\forall B \subset F) f(f^{-1}(B)) = B$.
3. Montrer que f est injective $\Leftrightarrow (\forall A_1, A_2 \subset E) f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.

VI. Composition et décomposition

Exercice 14 *Composition explicite*

Soient

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x + 3 \quad ; \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 - 1 \quad ; \quad h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{1+x^2}.$$

1. Calculer $g \circ f, f \circ g, h \circ f, f \circ h$.
2. Vérifier que $g \circ f \neq f \circ g$ (donner un point qui les distingue).
3. Calculer $(h \circ g) \circ f$ et $h \circ (g \circ f)$. Comparer.
4. Trouver $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f \circ \varphi = g$ (si possible).

Exercice 15 *Décomposition*

Décomposer chacune des applications suivantes comme composée de deux ou trois applications élémentaires (préciser les ensembles de départ et d'arrivée à chaque étape) :

1. $\varphi_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (5x - 2)^3$.
2. $\varphi_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x^2 + 4}$.
3. $\varphi_3 :]2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x - 2}$.
4. $\varphi_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \cos(3x + \pi)$.
5. $\varphi_5 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{1 + \sqrt{1 + x^2}}$.

Exercice 16 *Propriétés et théorème*

Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications.

1. Démontrer : si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
2. Démontrer : si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
3. En déduire que si $g \circ f$ est bijective *et* f est surjective, alors f est bijective.
4. Soit $f : E \rightarrow E$ telle que $f \circ f = \text{id}_E$. Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1} .
5. Soient f, g, h tels que $g \circ f = h \circ f$ avec f surjective. Montrer que $g = h$.

Fin de la série – Ensembles et Applications