

Ensembles et Applications

1^{ère} Année Baccalauréat – Sciences Mathématiques

Volume horaire officiel : 10h (cf. répartition 2013) – **Pré-requis** : Notions de logique (chapitre 1), ordre dans $\mathbb{R}$, fonctions numériques du tronc commun.

Capacités attendues : exprimer un ensemble par extension ou par compréhension ; relier les opérations sur les ensembles aux connecteurs logiques ; déterminer l'image directe et l'image réciproque d'une partie par une application ; reconnaître et utiliser une bijection et sa réciproque ; composer et décomposer des applications.

Table des matières

1 Ensembles : extension et compréhension	3
1.1 Notion d'ensemble et d'appartenance	3
1.2 Définition d'un ensemble par extension	3
1.3 Définition d'un ensemble par compréhension	4
1.4 Diagrammes de Venn	4
2 Inclusion et égalité	5
2.1 Inclusion	5
2.2 Égalité de deux ensembles	5
2.3 Propriétés de l'inclusion	6
3 Ensemble des parties d'un ensemble	7
3.1 Définition	7
3.2 Exemples	7
3.3 Cardinal de $\mathcal{P}(E)$	7
4 Opérations sur les ensembles	9
4.1 Complémentaire	9
4.2 Intersection	9
4.3 Réunion	9
4.4 Propriétés algébriques	10
4.5 Distributivité et lois de De Morgan	10
4.6 Inclusion et opérations	11
4.7 Différence et différence symétrique	11
5 Produit cartésien	13
5.1 Couple ordonné	13
5.2 Produit cartésien de deux ensembles	13
5.3 Propriétés	13
6 Applications : définition et égalité	15
6.1 Définition d'une application	15
6.2 Égalité de deux applications	15
6.3 Restriction et prolongement	16
7 Image directe et image réciproque	17
7.1 Image directe d'une partie	17
7.2 Image réciproque d'une partie	17
7.3 Propriétés	18
8 Injection, surjection, bijection	19
8.1 Application injective	19
8.2 Application surjective	19
8.3 Application bijective	19
8.4 Bijection réciproque	20

9	Composition d'applications	22
9.1	Définition	22
9.2	Propriétés	22
9.3	Décomposition d'une application	23
10	Synthèse	24
10.1	Correspondance logique – opérations ensemblistes	24
10.2	Synoptique des opérations	24
10.3	Caractérisations injection / surjection / bijection	24
10.4	Pièges classiques	24

1. Ensembles : extension et compréhension

Activité

On considère les collections suivantes :

- (a) Les entiers naturels n vérifiant $n^2 \leq 30$.
- (b) Les nombres entiers compris entre 5 et 9 (au sens large).
- (c) Les solutions réelles de l'équation $x^2 - 3x + 2 = 0$.
- (d) Les rectangles dont la longueur vaut 7 cm.

Pour chaque collection : donner la liste explicite de ses éléments lorsque c'est possible. Si la liste est trop longue (ou infinie), expliquer comment caractériser un élément.

1.1 Notion d'ensemble et d'appartenance

Définition

Définition 1.1 — Un **ensemble** E est une collection (non ordonnée, sans répétition) d'objets bien définis, appelés **éléments** de E .

Si x est un élément de E , on écrit $x \in E$ (lu « x appartient à E »). Sinon, $x \notin E$.

Remarque

- Un ensemble est entièrement déterminé par la liste de ses éléments : $\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\} = \{1, 2, 2, 3\}$.
- L'**ensemble vide**, noté $\emptyset$, est l'ensemble sans aucun élément : $(\forall x) x \notin \emptyset$.
- Le **singleton** $\{a\}$ est l'ensemble qui contient exactement l'élément a .
- **Attention** : ne pas confondre a et $\{a\}$. Par exemple, $1 \in \{1\}$ mais $1 \neq \{1\}$ et $\{1\} \in \{\{1\}\}$.

1.2 Définition d'un ensemble par extension

Définition

Définition 1.2 — Définir un ensemble **par extension**, c'est en donner la liste explicite et complète des éléments, entourés d'accolades, séparés par des points-virgules.

Exemple

Exemple 1.1 — Quelques ensembles définis par extension :

$$A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\} \quad ; \quad B = \{-2; -1; 0; 1; 2\} \quad ; \quad C = \{\sqrt{2}; \pi; e\}.$$

Pour les ensembles infinis ou à grand nombre d'éléments, on utilise des points de suspension lorsque la *règle de progression* est claire :

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\} \quad ; \quad \{0; 2; 4; 6; \dots; 100\}.$$

1.3 Définition d'un ensemble par compréhension

Définition

Définition 1.3 — Définir un ensemble **par compréhension**, c'est donner une *propriété caractéristique* $P(x)$ que vérifient exactement ses éléments. On écrit :

$$E = \{x \in F \mid P(x)\} \quad \text{ou} \quad E = \{x \in F : P(x)\}$$

qui se lit « E est l'ensemble des x de F tels que $P(x)$ ».

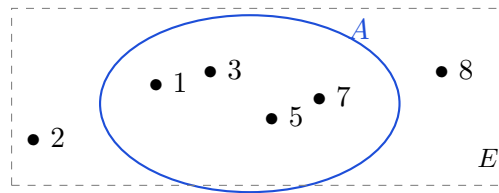
Exemple

Exemple 1.2 — Quelques ensembles définis par compréhension :

- $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 5\} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.
- $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x - 6 = 0\} = \{-3; 2\}$.
- $C = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\} = \{1; 3; 5; 7; \dots\}$: ensemble des entiers naturels impairs.
- $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0\} = \emptyset$: aucune solution réelle.

1.4 Diagrammes de Venn

Un **diagramme de Venn** est une représentation graphique d'un ou plusieurs ensembles : chaque ensemble est figuré par une courbe fermée du plan, et les éléments sont placés à l'intérieur ou à l'extérieur de cette courbe.



Sur le diagramme, $A = \{1, 3, 5, 7\}$ est inclus dans l'ensemble de référence $E = \{1, 2, 3, 5, 7, 8\}$.

Application

1. Écrire en extension : $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 < 25\}$; $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 3\}$; $C = \{k \in \mathbb{N}^* \mid k \text{ divise } 12\}$.
2. Écrire en compréhension : $D = \{1; 4; 9; 16; 25; \dots\}$; $F = \{2; 4; 8; 16; 32; \dots\}$; $G = \{-3; -1; 1; 3\}$.

2. Inclusion et égalité

2.1 Inclusion

Définition

Définition 2.1 — Soient A et B deux ensembles. On dit que A est **inclus** dans B (ou que A est une **partie** de B , ou un **sous-ensemble** de B), et on note $A \subset B$, si tout élément de A est aussi élément de B :

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x) (x \in A \Rightarrow x \in B).$$

La négation se note $A \not\subset B$ et s'écrit : $(\exists x) (x \in A \text{ et } x \notin B)$.

Exemple

Exemple 2.1 — Quelques inclusions usuelles :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

$$\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\} \quad ; \quad \{0, 2, 4\} \subset 2\mathbb{N} \quad ; \quad \emptyset \subset E \text{ pour tout ensemble } E.$$

2.2 Égalité de deux ensembles

Définition

Définition 2.2 — Deux ensembles A et B sont **égaux**, et on écrit $A = B$, lorsqu'ils possèdent exactement les mêmes éléments :

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x) (x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

Propriété

Propriété 2.1 — Pour deux ensembles A et B :

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B \text{ et } B \subset A).$$

Démonstration

$(\Rightarrow)$ Si $A = B$, tout élément de A est dans B (donc $A \subset B$) et tout élément de B est dans A (donc $B \subset A$).

$(\Leftarrow)$ Supposons $A \subset B$ et $B \subset A$. Soit x quelconque.

- Si $x \in A$, par $A \subset B$, $x \in B$.
- Si $x \in B$, par $B \subset A$, $x \in A$.

Donc $x \in A \Leftrightarrow x \in B$, ce qui équivaut à $A = B$. □

Méthode

Pour démontrer une égalité $A = B$, on procède très souvent par double inclusion :

1. Montrer que $A \subset B$: prendre $x \in A$ et démontrer $x \in B$.
2. Montrer que $B \subset A$: prendre $x \in B$ et démontrer $x \in A$.

2.3 Propriétés de l'inclusion

Propriété

Propriété 2.2 — Soient A, B, C des ensembles.

- (a) **Réflexivité** : $A \subset A$.
- (b) **Transitivité** : $(A \subset B \text{ et } B \subset C) \Rightarrow A \subset C$.
- (c) **Antisymétrie** : $(A \subset B \text{ et } B \subset A) \Rightarrow A = B$.

Démonstration

(b) **Transitivité.** Soient $x \in A$. Comme $A \subset B$, $x \in B$. Comme $B \subset C$, $x \in C$. Donc $x \in A \Rightarrow x \in C$, ce qui prouve $A \subset C$.

(a) et (c) sont immédiates par la définition. □

Exemple

Exemple 2.2 — Montrer que $A = B$, où :

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 \leq 9\} \quad ; \quad B = \{0; 1; 2; 3\}.$$

Solution. On procède par double inclusion.

- $B \subset A$: pour chaque élément de B , vérifier qu'il est dans A . $0^2 = 0 \leq 9$, $1^2 = 1 \leq 9$, $2^2 = 4 \leq 9$, $3^2 = 9 \leq 9$. Donc $\{0, 1, 2, 3\} \subset A$.
- $A \subset B$: soit $n \in A$. Alors $n \in \mathbb{N}$ et $n^2 \leq 9$. Comme $n \geq 0$, $n^2 \leq 9$ équivaut à $n \leq 3$. Donc $n \in \{0, 1, 2, 3\} = B$.

Conclusion : $A = B$. □

Application

1. Montrer que $A = B$, où $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4 = 0\}$ et $B = \{-2; 2\}$.
2. Montrer que $C \subset D$, où $C = \{4k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ et $D = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. A-t-on $C = D$?
3. Montrer que $\emptyset \subset E$ pour tout ensemble E .

3. Ensemble des parties d'un ensemble

3.1 Définition

Définition

Définition 3.1 — Soit E un ensemble. L'ensemble des parties de E , noté $\mathcal{P}(E)$ (ou $\mathcal{P}(E)$), est l'ensemble dont les éléments sont *toutes* les parties (sous-ensembles) de E :

$$\mathcal{P}(E) = \{ A \mid A \subset E \}.$$

On a donc l'équivalence fondamentale :

$$A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow A \subset E.$$

Remarque

Distinction cruciale entre $\in$ et $\subset$:

- « $x \in E$ » : x est un élément de E .
- « $A \subset E$ » : tous les éléments de A sont éléments de E ; mais A lui-même est un *ensemble*, pas un élément de E .
- « $A \in \mathcal{P}(E)$ » : ici A est un *élément* de l'ensemble $\mathcal{P}(E)$; c'est équivalent à $A \subset E$.

Toujours, $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$ et $E \in \mathcal{P}(E)$.

3.2 Exemples

Exemple

Exemple 3.1 — Soit $E = \{a, b, c\}$. L'ensemble des parties de E comporte $2^3 = 8$ éléments :

$$\mathcal{P}(E) = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\} \}.$$

Exemple

Exemple 3.2 — Soit $E = \{1\}$. Alors $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}\}$, qui compte 2 éléments.

Soit $E = \emptyset$. Alors $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, qui compte 1 élément : $\mathcal{P}(\emptyset)$ est non vide !

3.3 Cardinal de $\mathcal{P}(E)$

Propriété

Propriété 3.1 — Si E est un ensemble fini de cardinal n (i.e. ayant n éléments), alors $\mathcal{P}(E)$ est fini et :

$$\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n.$$

Démonstration

Démonstration par récurrence sur n .

Initialisation ($n = 0$). Si $\text{Card}(E) = 0$, alors $E = \emptyset$ et $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, qui a $1 = 2^0$ élément.

Hérédité. Supposons la propriété vraie pour tout ensemble à n éléments. Soit E un ensemble de cardinal $n + 1$. Fixons $a \in E$ et posons $E' = E \setminus \{a\}$ (qui a n éléments).

Les parties de E se répartissent en deux catégories disjointes :

- celles qui ne contiennent pas a : ce sont exactement les parties de E' .
- celles qui contiennent a : ce sont exactement les ensembles de la forme $A \cup \{a\}$ avec $A \subset E'$.

La première catégorie a $\text{Card}(\mathcal{P}(E')) = 2^n$ éléments par hypothèse de récurrence. Pour la seconde, l'application

$$\Phi : \mathcal{P}(E') \rightarrow \{ B \subset E \mid a \in B \}, \quad A \mapsto A \cup \{a\}$$

est bijective : son inverse est $B \mapsto B \setminus \{a\}$. La seconde catégorie a donc aussi 2^n éléments. Donc

$$\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n + 2^n = 2^{n+1}.$$

□

Application

1. Donner explicitement $\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\})$. Combien d'éléments ?
2. Soit E tel que $\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 16$. Que vaut $\text{Card}(E)$?
3. Vrai ou faux ? Justifier.
 - (a) $\emptyset \in \mathcal{P}(\{1, 2\})$.
 - (b) $\{1\} \subset \mathcal{P}(\{1, 2\})$.
 - (c) $\{\{1\}\} \in \mathcal{P}(\{1, 2\})$.
 - (d) $\{\{1\}\} \subset \mathcal{P}(\{1, 2\})$.

4. Opérations sur les ensembles

Dans toute cette section, A, B, C désignent des parties d'un ensemble de référence E (appelé **ensemble univers**).

4.1 Complémentaire

Définition

Définition 4.1 — Le **complémentaire** de A dans E , noté C_E^A ou simplement $\bar{A}$ lorsque l'univers E est clair, est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A :

$$\bar{A} = \{x \in E \mid x \notin A\}.$$

On a donc : $x \in \bar{A} \Leftrightarrow (x \in E \text{ et } x \notin A)$.

Propriété

Propriété 4.1 — Pour toute partie A de E :

$$\bar{\emptyset} = E \quad ; \quad \bar{E} = \emptyset \quad ; \quad \overline{(\bar{A})} = A.$$

Démonstration

$\overline{(\bar{A})} = A$: pour tout $x \in E$,

$$x \in \overline{(\bar{A})} \Leftrightarrow (x \in E \wedge x \notin \bar{A}) \Leftrightarrow (x \in E \wedge x \in A) \Leftrightarrow x \in A,$$

la dernière équivalence venant de $A \subset E$. □

4.2 Intersection

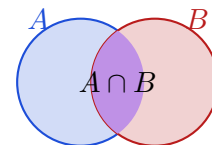
Définition

Définition 4.2 — L'**intersection** de A et B , notée $A \cap B$, est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A **et** à B :

$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

Caractérisation. $x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B)$.

Cas particulier. Si $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont **disjoints**.



4.3 Réunion

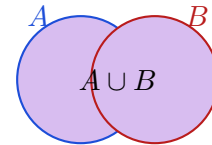
Définition

Définition 4.3 — La **réunion** de A et B , notée $A \cup B$, est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A **ou** à B (au sens inclusif) :

$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Caractérisation. $x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B)$.

Note : un élément qui appartient à A et à B appartient également à $A \cup B$.



4.4 Propriétés algébriques

Propriété

Propriété 4.2 — Soient A, B, C des parties de E .

- (a) Commutativité : $A \cap B = B \cap A$ et $A \cup B = B \cup A$.
- (b) Associativité : $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ et $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
- (c) Idempotence : $A \cap A = A$ et $A \cup A = A$.
- (d) Éléments neutres : $A \cap E = A$, $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cup E = E$.
- (e) Inclusions : $A \cap B \subset A \subset A \cup B$.
- (f) Avec le complémentaire : $A \cap \overline{A} = \emptyset$ et $A \cup \overline{A} = E$.

Démonstration

Commutativité de $\cap$: pour tout $x \in E$,

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B) \Leftrightarrow (x \in B) \wedge (x \in A) \Leftrightarrow x \in B \cap A,$$

grâce à la commutativité de la conjonction logique. Les autres propriétés se démontrent de manière analogue, en remontant aux propriétés des connecteurs logiques. $\square$

4.5 Distributivité et lois de De Morgan

Théorème

Théorème 4.1 — Soient A, B, C des parties de E .

Distributivité :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Lois de De Morgan :

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad ; \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Démonstration

Distributivité de $\cap$ sur $\cup$. Pour tout $x \in E$:

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) &\Leftrightarrow (x \in A) \wedge ((x \in B) \vee (x \in C)) \\ &\Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \in B)) \vee ((x \in A) \wedge (x \in C)) \quad (\text{distributivité de } \wedge \text{ sur } \vee) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \cap B) \vee (x \in A \cap C) \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C). \end{aligned}$$

Loi de De Morgan. Pour tout $x \in E$:

$$\begin{aligned}
 x \in \overline{A \cap B} &\Leftrightarrow x \notin A \cap B \\
 &\Leftrightarrow \overline{(x \in A) \wedge (x \in B)} \\
 &\Leftrightarrow (x \notin A) \vee (x \notin B) \quad (\text{De Morgan logique}) \\
 &\Leftrightarrow (x \in \overline{A}) \vee (x \in \overline{B}) \\
 &\Leftrightarrow x \in \overline{A \cap B}.
 \end{aligned}$$

□

4.6 Inclusion et opérations

Propriété

Propriété 4.3 — Pour deux parties A et B de E , les propositions suivantes sont équivalentes :

$$(1) A \subset B \quad ; \quad (2) A \cap B = A \quad ; \quad (3) A \cup B = B \quad ; \quad (4) \overline{B} \subset \overline{A}.$$

Démonstration

(1) $\Rightarrow$ (2) : Supposons $A \subset B$. Toujours $A \cap B \subset A$. Réciproquement, soit $x \in A$; alors $x \in B$ par hypothèse, donc $x \in A \cap B$. Conclusion : $A \cap B = A$.

(2) $\Rightarrow$ (1) : Si $A \cap B = A$ et $x \in A$, alors $x \in A \cap B$, donc $x \in B$. Donc $A \subset B$.

Les équivalences (1) $\Leftrightarrow$ (3) et (1) $\Leftrightarrow$ (4) se démontrent de façon analogue.

□

Exemple

Exemple 4.1 — Soient $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, $C = \{3, 4, 5\}$, parties de $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Calculer : $A \cap B$, $A \cup B$, $\overline{A}$, $A \cap (B \cup C)$.

Solution.

- $A \cap B = \{2, 4\}$; $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$; $\overline{A} = \{5, 6, 7\}$.
- $B \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, donc $A \cap (B \cup C) = \{2, 3, 4\}$.
- Vérification : $(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{2, 4\} \cup \{3, 4\} = \{2, 3, 4\}$. ✓ (distributivité)

4.7 Différence et différence symétrique

Définition

Définition 4.4 — Soient A , B deux parties de E .

- La **différence** de A et B (dans cet ordre), notée $A \setminus B$, est l'ensemble des éléments de A qui ne sont pas dans B :

$$A \setminus B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \notin B\} = A \cap \overline{B}.$$

- La **différence symétrique** de A et B , notée $A \triangle B$, est l'ensemble des éléments qui appartiennent à *exactement un* des deux ensembles :

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Propriété

Propriété 4.4 — Pour deux parties A et B de E :

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

En particulier, $A \triangle A = \emptyset$ et $A \triangle \emptyset = A$.

Démonstration

$x \in A \triangle B$ ssi x appartient à exactement un des deux ensembles, c'est-à-dire $x \in A \cup B$ mais $x \notin A \cap B$.

Formellement, $x \in A \triangle B \Leftrightarrow (x \in A \setminus B) \vee (x \in B \setminus A) \Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \notin B)) \vee ((x \in B) \wedge (x \notin A))$, qui est précisément la condition « x appartient à un seul des deux ». Ce « ou exclusif » s'écrit aussi $(x \in A \cup B) \wedge (x \notin A \cap B)$. $\square$

Exemple

Exemple 4.2 — Avec $A = \{1, 2, 3, 4\}$ et $B = \{3, 4, 5, 6\}$ dans $E = \{1, \dots, 6\}$:

$$A \setminus B = \{1, 2\} \quad ; \quad B \setminus A = \{5, 6\} \quad ; \quad A \triangle B = \{1, 2, 5, 6\}.$$

On vérifie : $A \cup B = \{1, \dots, 6\}$, $A \cap B = \{3, 4\}$, donc $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = \{1, 2, 5, 6\} = A \triangle B$.
✓

Application

1. Soient A, B, C des parties de E . Démontrer : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
2. Démontrer la seconde loi de De Morgan : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
3. Soient A, B parties de E . Démontrer que $A \subset B \Leftrightarrow A \cap \overline{B} = \emptyset$.
4. Soient A, B parties de E . Démontrer que $A \setminus B = A$ ssi $A \cap B = \emptyset$.

5. Produit cartésien

5.1 Couple ordonné

Définition

Définition 5.1 — Soient a et b deux objets. Le **couple** (a, b) est la donnée ordonnée des deux objets : a est la **première composante**, b la **seconde**.

Égalité des couples : $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow (a = c \text{ et } b = d)$.

Remarque

L'ordre compte : $(a, b) \neq (b, a)$ en général. Par exemple, $(1, 2) \neq (2, 1)$.

Par contre, l'ensemble $\{a, b\}$ ne dépend pas de l'ordre : $\{a, b\} = \{b, a\}$.

5.2 Produit cartésien de deux ensembles

Définition

Définition 5.2 — Soient E et F deux ensembles. Le **produit cartésien** $E \times F$ est l'ensemble de tous les couples (x, y) avec $x \in E$ et $y \in F$:

$$E \times F = \{ (x, y) \mid x \in E \text{ et } y \in F \}.$$

Remarque

On note $E \times E = E^2$. Plus généralement, $E^n = \{ (x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in E \}$ (**n -uplets**).

Conventions :

- $E \times \emptyset = \emptyset \times F = \emptyset$.
- Si E, F sont finis : $\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E) \cdot \text{Card}(F)$.

Exemple

Exemple 5.1 — Soient $E = \{1, 2\}$ et $F = \{a, b, c\}$. Alors

$$E \times F = \{ (1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c) \}, \quad \text{Card}(E \times F) = 6.$$

$\mathbb{R}^2$ représente l'ensemble des couples de réels, et géométriquement le plan muni d'un repère.

5.3 Propriétés

Propriété

Propriété 5.1 — Soient E, F, G, H des ensembles.

$$(E \cap F) \times G = (E \times G) \cap (F \times G)$$

$$(E \cup F) \times G = (E \times G) \cup (F \times G)$$

$$E \times F = F \times E \Leftrightarrow (E = \emptyset \text{ ou } F = \emptyset \text{ ou } E = F).$$

Application

1. Soit $E = \{0, 1\}$. Donner explicitement E^3 et son cardinal.
2. Démontrer la première propriété : $(E \cap F) \times G = (E \times G) \cap (F \times G)$.
3. Représenter dans le plan le produit cartésien $[0, 2] \times [1, 3]$.

6. Applications : définition et égalité

6.1 Définition d'une application

Activité

On considère $E = \{1, 2, 3\}$, $F = \{a, b, c, d\}$ et trois « relations » de E vers F :

Relation 1	Relation 2	Relation 3
$1 \mapsto a, 2 \mapsto b$ (3 n'a pas d'image)	$1 \mapsto a, 1 \mapsto b, 2 \mapsto c, 3 \mapsto d$ (1 a deux images)	$1 \mapsto a, 2 \mapsto b, 3 \mapsto a$ (Tout est bien défini)

Lesquelles sont des « applications » ?

Définition

Définition 6.1 — Soient E et F deux ensembles. Une **application** f de E vers F est un procédé qui associe à *chaque* élément x de E un *unique* élément y de F , appelé l'**image** de x par f , et noté $f(x)$. On écrit :

$$f : E \rightarrow F, \quad x \mapsto f(x).$$

- E est l'**ensemble de départ**.
- F est l'**ensemble d'arrivée**.
- L'élément $f(x)$ est appelé l'**image** de x par f .
- Si $f(x) = y$, on dit que x est un **antécédent** de y par f (un même y peut avoir plusieurs antécédents, ou aucun).

Remarque

Deux conditions essentielles dans la définition d'une application :

- (1) **Existence** : tout élément de E a une image.
- (2) **Unicité** : cette image est unique.

L'ensemble des applications de E vers F se note $\mathcal{F}(E, F)$ ou F^E .

6.2 Égalité de deux applications

Définition

Définition 6.2 — Deux applications $f : E \rightarrow F$ et $g : E' \rightarrow F'$ sont **égales**, et on écrit $f = g$, si :

$$E = E' \text{ et } F = F' \text{ et } (\forall x \in E) \ f(x) = g(x).$$

Exemple

Exemple 6.1 — Les applications suivantes sont *distinctes* bien qu'elles aient la même « formule » :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \ x \mapsto x^2 \quad ; \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, \ x \mapsto x^2.$$

L'ensemble d'arrivée diffère ($\mathbb{R}$ vs $\mathbb{R}_+$).

6.3 Restriction et prolongement

Définition

Définition 6.3 — Soit $f : E \rightarrow F$ et $A \subset E$.

- La **restriction** de f à A , notée $f|_A$ (ou $f|_A$), est l'application

$$f|_A : A \rightarrow F, \quad x \mapsto f(x).$$

On a donc $f|_A(x) = f(x)$ pour tout $x \in A$.

- Réciproquement, f est appelée un **prolongement** de $f|_A$ à E .

Exemple

Exemple 6.2 — Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$. Sa restriction à $\mathbb{R}_+$ est l'application $f|_{\mathbb{R}_+} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$. Cette dernière a une propriété nouvelle (croissance stricte) que f n'a pas sur $\mathbb{R}$ entier.

7. Image directe et image réciproque

Dans toute cette section, $f : E \rightarrow F$ désigne une application, A une partie de E , B une partie de F .

7.1 Image directe d'une partie

Définition

Définition 7.1 — L'**image directe** de A par f , notée $f(A)$, est l'ensemble des images par f des éléments de A :

$$f(A) = \{ f(x) \mid x \in A \} = \{ y \in F \mid (\exists x \in A) y = f(x) \}.$$

Remarque

$f(A)$ est une partie de F ($f(A) \subset F$).

Cas particulier : l'image directe de E tout entier, $f(E)$, est appelée l'**image** (ou la **plage**) de f , parfois notée $\text{Im}(f)$.

Exemple

Exemple 7.1 — Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ et $A = [-1; 2]$.

$$f(A) = \{ x^2 \mid x \in [-1; 2] \} = [0; 4].$$

En effet, pour $x \in [-1, 2]$, $|x| \in [0, 2]$, donc $x^2 \in [0, 4]$. Réciproquement, tout $y \in [0, 4]$ admet $\sqrt{y} \in [0, 2] \subset [-1, 2]$ comme antécédent.

7.2 Image réciproque d'une partie

Définition

Définition 7.2 — L'**image réciproque** de B par f , notée $f^{-1}(B)$, est l'ensemble des éléments de E dont l'image est dans B :

$$f^{-1}(B) = \{ x \in E \mid f(x) \in B \}.$$

Remarque

Attention : la notation $f^{-1}(B)$ ne suppose *pas* que f admette une bijection réciproque. C'est simplement une notation pour l'ensemble des antécédents collectifs des éléments de B .

$f^{-1}(B)$ est une partie de E ($f^{-1}(B) \subset E$).

Exemple

Exemple 7.2 — Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ et $B = [1, 4]$.

$$f^{-1}(B) = \{ x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x^2 \leq 4 \} = [-2, -1] \cup [1, 2].$$

7.3 Propriétés

Propriété

Propriété 7.1 — Soient $f : E \rightarrow F$, $A, A' \subset E$ et $B, B' \subset F$.

- (a) $A \subset A' \Rightarrow f(A) \subset f(A')$ et $B \subset B' \Rightarrow f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$.
- (b) $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$.
- (c) $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$ (en général *pas* d'égalité).
- (d) $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$.
- (e) $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$.
- (f) $A \subset f^{-1}(f(A))$ et $f(f^{-1}(B)) \subset B$ (inclusions, pas d'égalité en général).

Démonstration

(d) **Image réciproque d'une réunion.** Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned}
 x \in f^{-1}(B \cup B') &\Leftrightarrow f(x) \in B \cup B' \\
 &\Leftrightarrow (f(x) \in B) \vee (f(x) \in B') \\
 &\Leftrightarrow (x \in f^{-1}(B)) \vee (x \in f^{-1}(B')) \\
 &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B').
 \end{aligned}$$

(c) **Inégalité stricte pour l'intersection.** Soit $y \in f(A \cap A')$: il existe $x \in A \cap A'$ avec $y = f(x)$. Alors $x \in A$, donc $y \in f(A)$; et $x \in A'$, donc $y \in f(A')$. D'où $y \in f(A) \cap f(A')$.

Contre-exemple à l'égalité. Prendre $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, $A = \{-1\}$, $A' = \{1\}$. Alors $A \cap A' = \emptyset$, donc $f(A \cap A') = \emptyset$. Mais $f(A) = f(A') = \{1\}$, donc $f(A) \cap f(A') = \{1\} \neq \emptyset$. $\square$

Application

1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x + 1$. Calculer $f([0, 3])$ et $f^{-1}([-1, 5])$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 - 2x$. Calculer $f^{-1}(\{0\})$ et $f^{-1}([-1, 3])$.
3. Démontrer la propriété (b) : $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$.

8. Injection, surjection, bijection

Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

8.1 Application injective

Définition

Définition 8.1 — On dit que f est **injective** (ou que f est une **injection**) lorsque tout élément de F a *au plus un* antécédent par f , autrement dit :

$$(\forall x_1, x_2 \in E) \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

De manière équivalente (par contraposée) :

$$(\forall x_1, x_2 \in E) \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Exemple

Exemple 8.1 — L'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x + 1$ est injective. En effet, si $f(x_1) = f(x_2)$ alors $2x_1 + 1 = 2x_2 + 1$, donc $x_1 = x_2$.

Non-injective : $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$. On a $g(-1) = g(1) = 1$ mais $-1 \neq 1$.

Devient injective sur $\mathbb{R}_+$: la restriction $g|_{\mathbb{R}_+} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ est injective.

8.2 Application surjective

Définition

Définition 8.2 — On dit que f est **surjective** (ou que f est une **surjection**) lorsque tout élément de F a *au moins un* antécédent par f :

$$(\forall y \in F)(\exists x \in E) \quad y = f(x).$$

Cela équivaut à : $f(E) = F$ (l'image de f est l'ensemble d'arrivée tout entier).

Exemple

Exemple 8.2 — L'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x + 1$ est surjective. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, $x = \frac{y-1}{2}$ vérifie $f(x) = y$.

Non-surjective : $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$. Aucun réel x ne donne $g(x) = -1$, donc g n'est pas surjective.

Devient surjective sur $\mathbb{R}_+$: $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto x^2$ est surjective (tout $y \geq 0$ admet $\sqrt{y}$ pour antécédent).

8.3 Application bijective

Définition

Définition 8.3 — On dit que f est **bijective** (ou que f est une **bijection**) lorsqu'elle est à la fois injective et surjective :

$$(\forall y \in F)(\exists ! x \in E) \quad y = f(x).$$

Tout élément de F a alors un *unique* antécédent dans E .

Exemple

Exemple 8.3 — L'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x + 1$ est bijective (injective et surjective).
L'application $\text{id}_E : E \rightarrow E$, $x \mapsto x$ (**application identité** de E) est bijective.

8.4 Bijection réciproque**Définition**

Définition 8.4 — Soit $f : E \rightarrow F$ une bijection. La **bijection réciproque** de f , notée f^{-1} , est l'application

$$f^{-1} : F \rightarrow E \quad \text{définie par} \quad f^{-1}(y) = \text{l'unique } x \in E \text{ tel que } f(x) = y.$$

Propriété

Propriété 8.1 — Soit $f : E \rightarrow F$ une bijection.

- (a) f^{-1} est elle-même une bijection, et $(f^{-1})^{-1} = f$.
- (b) Pour tout $x \in E$: $f^{-1}(f(x)) = x$.
- (c) Pour tout $y \in F$: $f(f^{-1}(y)) = y$.
- (d) **Caractérisation** : Si $g : F \rightarrow E$ vérifie $g \circ f = \text{id}_E$ et $f \circ g = \text{id}_F$, alors f est bijective et $g = f^{-1}$.

Démonstration

(d). Supposons $g \circ f = \text{id}_E$ et $f \circ g = \text{id}_F$.

f **injective** : si $f(x_1) = f(x_2)$, en appliquant $g : g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, c'est-à-dire $x_1 = x_2$ (puisque $g \circ f = \text{id}_E$).

f **surjective** : soit $y \in F$. Posons $x = g(y) \in E$. Alors $f(x) = f(g(y)) = (f \circ g)(y) = \text{id}_F(y) = y$.
Donc y admet x pour antécédent.

Conclusion : f est bijective. Pour tout $y \in F$, l'unique antécédent de y est $x = g(y)$; donc $f^{-1}(y) = g(y)$, soit $g = f^{-1}$. $\square$

Exemple

Exemple 8.4 — Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x + 1$.

Pour $y \in \mathbb{R}$, résolvons $y = 2x + 1 \Leftrightarrow x = \frac{y-1}{2}$. Donc

$$f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad y \mapsto \frac{y-1}{2}.$$

Vérification : $f^{-1}(f(x)) = \frac{(2x+1)-1}{2} = x. \quad \checkmark$

Méthode

Pour déterminer si $f : E \rightarrow F$ est bijective et trouver f^{-1} :

1. Soit $y \in F$. Résoudre l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$.
2. Si pour tout y , l'équation admet une *unique* solution x , alors f est bijective et $f^{-1}(y)$ est cette solution.

Application

1. Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité, puis déterminer la bijection réciproque le cas échéant :
 - (a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 3x - 5$.
 - (b) $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[, x \mapsto x^2$.
 - (c) $h : [1, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[, x \mapsto x^2 - 1$.
2. Soit $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*, x \mapsto \frac{1}{x}$. Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1} .

9. Composition d'applications

9.1 Définition

Définition

Définition 9.1 — Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications. La **composée** $g \circ f$ est l'application

$$g \circ f : E \rightarrow G, \quad x \mapsto g(f(x)).$$

On lit « g rond f » (ou « g après f », puisqu'on applique d'abord f puis g).

Remarque

Important : pour que $g \circ f$ soit définie, l'ensemble d'arrivée de f doit coïncider avec l'ensemble de départ de g .

Attention : la composition *n'est pas* commutative en général. $g \circ f$ et $f \circ g$ peuvent même ne pas être toutes les deux définies.

Exemple

Exemple 9.1 — Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x + 1$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$.

- $g \circ f : x \mapsto g(f(x)) = g(x + 1) = (x + 1)^2$.
- $f \circ g : x \mapsto f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 1$.

On voit que $g \circ f \neq f \circ g$ (par exemple, en $x = 1$, $g \circ f(1) = 4$ et $f \circ g(1) = 2$).

9.2 Propriétés

Propriété

Propriété 9.1 — Soient $f : E \rightarrow F, g : F \rightarrow G, h : G \rightarrow H$ des applications.

- (a) **Associativité** : $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.
- (b) **Identité** : $f \circ \text{id}_E = f$ et $\text{id}_F \circ f = f$.
- (c) **Injectivité** : si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
- (d) **Surjectivité** : si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
- (e) **Bijectivité** : si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Démonstration

(a) **Associativité.** Pour tout $x \in E$:

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))) \quad ; \quad (h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))).$$

Les deux applications coïncident sur E , donc sont égales.

(c) **Injectivité.** Supposons f, g injectives. Soit $x_1, x_2 \in E$ tels que $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$. Alors $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Comme g est injective, $f(x_1) = f(x_2)$. Comme f est injective, $x_1 = x_2$. Donc $g \circ f$ est injective.

(e) **Inverse de la composée.** Si f, g bijectives, $g \circ f$ est bijective d'après (c) et (d). Montrons $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ en utilisant la caractérisation : il suffit de vérifier que $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = \text{id}_E$ et $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = \text{id}_G$.

Par associativité :

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ \text{id}_F \circ f = f^{-1} \circ f = \text{id}_E.$$

Symétriquement pour l'autre. □

9.3 Décomposition d'une application

Décomposer une application complexe, c'est l'écrire comme composée d'applications plus simples. Cette technique est essentielle pour étudier les propriétés (continuité, dérivabilité...) au lycée.

Exemple

Exemple 9.2 — Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$. On peut décomposer :

$$\varphi = h \circ g \circ f$$

avec

$$f : x \mapsto x^2 \quad ; \quad g : t \mapsto t + 1 \quad ; \quad h : u \mapsto \sqrt{u}.$$

On précise les domaines : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow [1, +\infty[$, $h : [1, +\infty[\rightarrow [1, +\infty[$.

Vérification : $h(g(f(x))) = h(g(x^2)) = h(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1} = \varphi(x)$. ✓

Application

1. Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x + 1$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$. Calculer $g \circ f$ et $f \circ g$.
2. Décomposer en composée d'applications simples :
 - (a) $x \mapsto (3x - 7)^4$.
 - (b) $x \mapsto \frac{1}{x^2 + 1}$.
 - (c) $x \mapsto \sqrt{1 - x}$ (sur $] -\infty, 1]$).
3. Démontrer la propriété (d) : si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.

10. Synthèse

10.1 Correspondance logique – opérations ensemblistes

Logique	Ensembles	Lecture
$P \wedge Q$	$A \cap B$	et / intersection
$P \vee Q$	$A \cup B$	ou / réunion
$\overline{P}$	$\overline{A}$	non / complémentaire
$P \Rightarrow Q$	$A \subset B$	si... alors / inclusion
$P \Leftrightarrow Q$	$A = B$	équivalent / égal

10.2 Synoptique des opérations

Notation	Définition
$A \cap B$	$\{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$
$A \cup B$	$\{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$
$\overline{A}$	$\{x \in E \mid x \notin A\}$
$A \setminus B$	$\{x \in A \mid x \notin B\} = A \cap \overline{B}$
$A \triangle B$	$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
$A \times B$	$\{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$
$\mathcal{P}(E)$	$\{A \mid A \subset E\}$, de cardinal $2^{\text{Card}(E)}$ si E fini

10.3 Caractérisations injection / surjection / bijection

Type	Forme symbolique	Interprétation
Injection	$(\forall x_1, x_2) f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$	Au plus un antécédent.
Surjection	$(\forall y \in F)(\exists x \in E) y = f(x)$	Au moins un antécédent.
Bijection	$(\forall y \in F)(\exists ! x \in E) y = f(x)$	Exactement un antécédent ; f^{-1} existe.

10.4 Pièges classiques

Remarque

1. **Confondre $\in$ et $\subset$.** $\{1\} \in \mathcal{P}(\{1, 2\})$ mais $\{1\} \subset \{1, 2\}$, qui sont des relations différentes.
2. **Confondre $f^{-1}(B)$ (image réciproque) et la bijection réciproque f^{-1} .** La notation est la même, mais $f^{-1}(B)$ existe *toujours* pour toute partie B ; la bijection réciproque, elle, n'existe que si f est bijective.
3. **Image directe d'une intersection.** $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$ en général ; seule l'inclusion $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ est garantie.
4. **Restriction et propriétés.** Une application peut ne pas être injective sur E mais le devenir sur une partie $A \subset E$; étudier la restriction est souvent utile.
5. **Inverse de la composée.** $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ (*ordre inversé*, comme pour les chaussettes-chaussures).