

Table des matières

1	Les ensembles de nombres	2
1.1	Notations particulières	2
2	Nombres rationnels et irrationnels	2
	Caractérisation des nombres rationnels par l'écriture décimale	2
3	Opérations dans $\mathbb{R}$	3
3.1	Identités remarquables	3
3.2	Puissances entières	3
3.3	Racines carrées	4

1 Les ensembles de nombres

Définition

On distingue plusieurs ensembles de nombres :

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$: ensemble des **entiers naturels**.
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$: ensemble des **entiers relatifs**.
- $\mathbb{D}$: ensemble des **nombres décimaux**, qui s'écrivent sous la forme $\frac{a}{10^n}$, avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.
- $\mathbb{Q}$: ensemble des **nombres rationnels**, qui s'écrivent sous la forme $\frac{a}{b}$, avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$.
- $\mathbb{R}$: ensemble des **nombres réels**.

propriété

On a la chaîne d'**inclusions** suivante :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Exemple

- | | | |
|--------------------------|---------------------------------------|-------------------------------------|
| • $3 \in \mathbb{N}$ | • $\frac{3}{4} = 0,75 \in \mathbb{D}$ | • $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$. |
| • $-2 \in \mathbb{Z}$ | | • $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ |
| • $-2 \notin \mathbb{N}$ | • $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ | • $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. |

1.1 Notations particulières

Remarque

- $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, \dots\}$, $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, etc.
- $\mathbb{Z}_- = \{\dots, -3, -2, -1, 0\}$: entiers négatifs ou nuls.
- $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty[$, $\mathbb{R}_- =]-\infty; 0]$.
- $\mathbb{R}_+^* =]0; +\infty[$, $\mathbb{R}_-^* =]-\infty; 0[$.

2 Nombres rationnels et irrationnels

Définition

Un nombre réel est dit **irrationnel** s'il n'est pas rationnel, c'est-à-dire s'il ne peut pas s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$.

On note $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres irrationnels.

Exemple

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, \sqrt{2} + 1, \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

propriété

Caractérisation des nombres rationnels par l'écriture décimale

- Un nombre est **décimal** ssi son écriture décimale est *finie*.
- Un nombre est **rationnel** ssi son écriture décimale est *finie* ou *périodique* à partir d'un certain rang.
- Un nombre est **irrationnel** ssi son écriture décimale est *infinie et non périodique*.

Exemple

- $\frac{1}{4} = 0,25$: décimal.
- $\frac{1}{7} = 0,142857$: rationnel non décimal.
- $\frac{1}{3} = 0,333 \dots = 0,\overline{3}$: rationnel mais non décimal.
- $\sqrt{2} = 1,41421356 \dots$: irrationnel.

3 Opérations dans $\mathbb{R}$

propriété

Pour tous réels a, b, c :

- **Commutativité** : $a + b = b + a$ et $a \times b = b \times a$.
- **Associativité** : $(a + b) + c = a + (b + c)$ et $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$.
- **Élément neutre** : $a + 0 = a$ et $a \times 1 = a$.
- **Distributivité** : $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$.
- **Opposé** : tout $a \in \mathbb{R}$ admet un opposé $-a$ tel que $a + (-a) = 0$.
- **Inverse** : tout $a \in \mathbb{R}^*$ admet un inverse $\frac{1}{a}$ tel que $a \times \frac{1}{a} = 1$.

3.1 Identités remarquables

propriété

Pour tous réels a et b :

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
- $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Exemple

Développer $(x + 3)^2$ et factoriser $x^2 - 25$.

3.2 Puissances entières

Définition

Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs}}, \quad a^0 = 1 \ (a \neq 0), \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \ (a \neq 0).$$

propriété

Pour tous réels $a, b \neq 0$ et tous entiers relatifs m, n :

$$a^m \times a^n = a^{m+n}, \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}, \quad (ab)^n = a^n b^n, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Exemple

$$2^3 \times 2^5 = 2^8 = 256 ; \quad \frac{3^7}{3^4} = 3^3 = 27 ; \quad (2^3)^2 = 2^6 = 64.$$

3.3 Racines carrées

Définition

Pour tout réel $a \geq 0$, la **racine carrée** de a , notée $\sqrt{a}$, est l'unique réel positif dont le carré vaut a .

propriété

Pour tous réels $a, b \geq 0$ et $b \neq 0$ pour le quotient :

- $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
- $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
- $(\sqrt{a})^2 = a$
- $\sqrt{a^2} = |a|$

Exemple

- $\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = 5\sqrt{2}.$
- $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}.$
- $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3.$

Exercice

- 1 Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \sqrt{48} + \sqrt{75} - \sqrt{12}, \quad B = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}), \quad C = \frac{1}{\sqrt{2} - 1}$$

- 2 Soient $a = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ et $b = \sqrt{2} - \sqrt{3}$. Calculer $a + b$, $a - b$, $a \times b$, $a^2 + b^2$.

- 3 Le nombre $\frac{\sqrt{2}}{2}$ est-il rationnel ? Justifier.