

# Série d'exercices — Chapitre 9 : Équations différentielles

2<sup>e</sup> BAC SX BIOF

En. Nidal SABI

## Exercice 1 — EDO du 1<sup>er</sup> ordre $y' = ay$

Résoudre les équations différentielles, puis trouver la solution vérifiant la condition donnée :

1.  $y' = 3y$  et  $y(0) = 5$ .
2.  $y' + 5y = 0$  et  $y(\ln 2) = 4$ .
3.  $3y' - 2y = 0$  et  $y(3) = -1$ .
4. Soit  $f$  dérivable sur  $\mathbb{R}$  vérifiant  $f' + 2f = 0$  et  $f(\ln 3) = 6$ . Déterminer  $f$ , puis calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

## Exercice 2 — EDO du 1<sup>er</sup> ordre $y' = ay + b$

1. Résoudre  $(E_1) : y' = 3y + 2$  et trouver la solution  $g_1$  telle que  $g_1(-1) = \frac{1}{3}$ .
2. Résoudre  $(E_2) : y' + 2y - 4 = 0$  et trouver la solution dont la courbe passe par  $A(-\ln 2; 6)$ .
3. Résoudre  $(E_3) : y' - 4y = 0$ . Soit  $h$  une solution telle que  $h(0) = 1$  et  $h(1) = e^4 - 5$ . Cette condition est-elle compatible ? (*discuter*)

## Exercice 3 — Modélisation : refroidissement / dissolution

**Partie A Refroidissement.** La température  $T(t)$  d'un corps placé dans un milieu de température constante  $T_0 = 20^\circ\text{C}$  suit la loi de Newton :  $T'(t) = -k(T(t) - T_0)$  avec  $k > 0$ ,  $T(0) = 80$ .

1. Réécrire l'équation sous la forme  $T' = aT + b$  et résoudre.
2. Avec  $k = 0,1$  (en  $\text{min}^{-1}$ ), donner  $T(t)$  et calculer  $T(10)$ . Au bout de combien de temps  $T = 25^\circ\text{C}$  ?

**Partie B Cuve.** La quantité  $y(t)$  de soluté (en kg) à l'instant  $t$  (en h) vérifie :  $y'(t) = -0,5y(t) + 4$ ,  $y(0) = 2$ .

1. Résoudre cette équation différentielle.
2. Calculer  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$  ; interpréter physiquement.
3. À quel instant  $t_0$  a-t-on  $y(t_0) = 6$  ?

## Exercice 4 — EDO du 2<sup>nd</sup> ordre : cas $\Delta > 0$

1. Résoudre  $(E_1) : y'' - 3y' + 2y = 0$ .
2. Résoudre  $(E_2) : y'' - 5y' + 6y = 0$ , puis trouver la solution  $g$  vérifiant  $g(0) = 1$  et  $g'(0) = 2$ .
3. Résoudre  $(E_3) : y'' - y' - 6y = 0$ , puis trouver la solution telle que  $y(0) = 5$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = 0$ .

## Exercice 5 — EDO du 2<sup>nd</sup> ordre : cas $\Delta = 0$

1. Résoudre  $(E_1) : y'' + 4y' + 4y = 0$ .
2. Résoudre  $(E_2) : y'' + 6y' + 9y = 0$ , puis trouver la solution  $g$  vérifiant  $g(0) = 2$  et  $g'(0) = 1$ .
3. Soit  $(E_3) : y'' - 4y' + 4y = 0$ . Vérifier que  $f(x) = x e^{2x}$  est solution. Donner toutes les solutions.

## Exercice 6 — EDO du 2<sup>nd</sup> ordre : cas $\Delta < 0$

1. Résoudre  $(E_1) : y'' + 4y = 0$ , puis trouver la solution  $g$  vérifiant  $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$  et  $g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$ .
2. Résoudre  $(E_2) : y'' - 4y' + 13y = 0$ .
3. Résoudre  $(E_3) : y'' + 2y' + 5y = 0$ , puis trouver la solution telle que  $y(0) = 0$  et  $y'(0) = 4$ .

### Exercice 7 — Solution particulière + EDO avec second membre

**Partie A.** Soit  $(E) : y' - 4y = 6e^{4x}$ .

1. Vérifier que  $y_p(x) = 6xe^{4x}$  est une solution particulière de  $(E)$ .
2. Résoudre l'équation homogène  $(E_0) : y' - 4y = 0$ .
3. En déduire toutes les solutions de  $(E)$ .

**Partie B.** Soit  $\varphi(x) = x^2 + 1$ . Montrer que  $\varphi$  est solution particulière de  $(E') : y'' - y = -x^2 + 1$ . En déduire toutes les solutions de  $(E')$  (*indication : poser  $y = z + \varphi$* ).

### Exercice 8 — Oscillation harmonique en mécanique

Un point matériel oscille selon l'équation  $x''(t) + \omega^2 x(t) = 0$  où  $\omega > 0$ . À l'instant  $t = 0 : x(0) = x_0$  et  $x'(0) = v_0$ .

1. Résoudre cette équation différentielle.
2. Déterminer  $x(t)$  en fonction de  $x_0, v_0$  et  $\omega$ .
3. Vérifier que  $x(t)$  peut s'écrire  $x(t) = A \cos(\omega t - \varphi)$  pour des constantes  $A > 0$  et  $\varphi \in [0; 2\pi[$  à exprimer en fonction de  $x_0, v_0, \omega$ .
4. Application numérique :  $\omega = 2$  rad/s,  $x_0 = 1$  m,  $v_0 = 4$  m/s. Calculer  $A, \varphi$ , et la période.

### Exercice 9 — Vérification et identification

1. Soit  $f(x) = a \cos(2x) + b \sin(2x)$  avec  $a, b \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $f$  est solution de  $y'' + 4y = 0$  pour tous  $a, b$ .
2. Soit  $f(x) = (\alpha + \beta x) e^{-x}$  avec  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Vérifier que  $f$  est solution de  $y'' + 2y' + y = 0$ .
3. Trouver la valeur de  $\lambda$  pour que  $y_p(x) = \lambda e^{2x}$  soit une solution particulière de  $y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$ .

### Exercice 10 — Synthèse : étude $f$ + EDO

Soit  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (x + 1) e^{-x}$ .

1. Calculer  $f'(x)$  et  $f''(x)$ .
2. Vérifier que  $f$  est solution de l'équation différentielle  $y'' + 2y' + y = 0$ .
3. Soit  $g(x) = (\alpha + \beta x) e^{-x}$ . Pour quelles valeurs de  $\alpha, \beta$  la fonction  $g$  vérifie-t-elle  $g(0) = 1$  et  $g'(0) = 0$  ?
4. Étudier les variations de  $g$  sur  $\mathbb{R}$  et calculer  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x)$ .
5. Déterminer une primitive de  $g$  sur  $\mathbb{R}$  (*indication : IPP*).