

Table des matières

1	Équations différentielles du 1 ^{er} ordre : $y' = ay$	2
2	Équations différentielles du 1 ^{er} ordre : $y' = ay + b$	3
3	Équations différentielles du 2 nd ordre : $y'' + ay' + by = 0$	4
3.1	Tableau récapitulatif des trois cas	4
3.2	Cas $\Delta > 0$	4
3.3	Cas $\Delta = 0$	4
3.4	Cas $\Delta < 0$	5

1 Équations différentielles du 1^{er} ordre : $y' = ay$

Définition

Une *équation différentielle* est une équation dans laquelle l'inconnue est une fonction y , et qui fait intervenir cette fonction et ses dérivées.

Propriété

Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$y' = ay$$

sont les fonctions de la forme :

$$f(x) = k e^{ax}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Exemple

« Résolution avec condition initiale. »

Résoudre l'équation $(E) : y' + 2y = 0$, puis trouver la solution vérifiant $y(0) = 5$.

Solution. (E) s'écrit $y' = -2y$, donc $a = -2$. Les solutions générales sont :

$$f(x) = k e^{-2x}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Condition $f(0) = 5 : k = 5$. Donc $f(x) = 5e^{-2x}$.

Application

1 Résoudre les équations différentielles :

• $y' = 3y$

• $y' + 5y = 0$

2 Résoudre $(E) : 3y' - 2y = 0$, puis trouver la solution vérifiant $y(3) = -1$.

À faire à la maison

1 Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f' + 2f = 0$ et $f(\ln 3) = 6$.

a. Déterminer l'expression de $f(x)$.

b. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

c. Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variations.

2 On considère l'équation $(E) : y' - 5y = 0$. Soit g une solution de (E) telle que $g(1) - g(0) = e^5 - 1$. Déterminer g explicitement.

2 Équations différentielles du 1^{er} ordre : $y' = ay + b$

Propriété

Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation

$$y' = ay + b$$

sont les fonctions de la forme :

$$f(x) = k e^{ax} - \frac{b}{a}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Remarque

Méthode pratique. On écrit $y' = ay + b$ comme $y' = a\left(y + \frac{b}{a}\right)$. Le poser $z = y + \frac{b}{a}$ ramène à $z' = az$.

Exemple

« Résolution complète avec condition initiale. »

Résoudre $(E) : y' = 3y + 2$, puis trouver la solution g vérifiant $g(-1) = \frac{1}{3}$.

Solution. Avec $a = 3$, $b = 2$, les solutions sont :

$$f(x) = k e^{3x} - \frac{2}{3}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Condition $g(-1) = \frac{1}{3} : k e^{-3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$, soit $k e^{-3} = 1$, donc $k = e^3$.

Conclusion : $g(x) = e^3 e^{3x} - \frac{2}{3} = e^{3x+3} - \frac{2}{3}$.

Application

1 Résoudre $(E) : y' + 2y - 4 = 0$.

2 Déterminer la solution de (E) dont la courbe passe par $A(-\ln 2; 6)$.

À faire à la maison

Une cuve contient initialement $V_0 = 100$ litres d'une solution. La quantité $y(t)$ de soluté (en kg) à l'instant t (en heures) vérifie :

$$y'(t) = -0,5 y(t) + 4, \quad y(0) = 2.$$

1 Résoudre cette équation différentielle.

2 Calculer $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$; interpréter physiquement.

3 À quel instant t_0 a-t-on $y(t_0) = 6$?

4 On considère $(E) : y' - 4y = 6e^{4x}$. Montrer que $y_p(x) = 6x e^{4x}$ est une solution particulière. Dédurre toutes les solutions de (E) (*indication : poser $y = z + y_p$*).

3 Équations différentielles du 2nd ordre : $y'' + ay' + by = 0$

Définition

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. L'équation

$$r^2 + ar + b = 0$$

est appelée *équation caractéristique* de l'équation différentielle

$$y'' + ay' + by = 0.$$

3.1 Tableau récapitulatif des trois cas

Discriminant $\Delta = a^2 - 4b$	Racines de l'équation caractéristique	Solutions générales sur $\mathbb{R}$
$\Delta > 0$	$r_1, r_2 \in \mathbb{R}, r_1 \neq r_2$	$y(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$
$\Delta = 0$	racine double $r_0 = -\frac{a}{2}$	$y(x) = (\alpha + \beta x) e^{r_0 x}$
$\Delta < 0$	$r_{1,2} = p \pm iq, q > 0$	$y(x) = e^{px}(\alpha \cos(qx) + \beta \sin(qx))$

$(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Avec deux conditions initiales (par exemple $y(x_0)$ et $y'(x_0)$), α et β sont uniquement déterminés.

3.2 Cas $\Delta > 0$

Exemple

« Cas $\Delta > 0$. »

Résoudre $(E) : y'' - 3y' + 2y = 0$, puis trouver la solution g telle que $g(0) = 1$ et $g'(0) = 0$.

Solution. Équation caractéristique : $r^2 - 3r + 2 = 0$. $\Delta = 9 - 8 = 1 > 0$. Racines : $r_1 = 1, r_2 = 2$. Solutions :

$$y(x) = \alpha e^x + \beta e^{2x}.$$

$g(0) = \alpha + \beta = 1$; $g'(x) = \alpha e^x + 2\beta e^{2x}$, donc $g'(0) = \alpha + 2\beta = 0$. D'où $\beta = -1, \alpha = 2$. Conclusion : $g(x) = 2e^x - e^{2x}$.

3.3 Cas $\Delta = 0$

Exemple

« Cas $\Delta = 0$. »

Résoudre $(E) : y'' + 4y' + 4y = 0$.

Solution. Équation caractéristique : $r^2 + 4r + 4 = 0$, soit $(r + 2)^2 = 0$. Racine double $r_0 = -2$. Solutions :

$$y(x) = (\alpha + \beta x) e^{-2x}, \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

3.4 Cas $\Delta < 0$

Exemple

« Cas $\Delta < 0$. »

Résoudre $(E) : y'' - 4y' + 13y = 0$.

Solution. Équation caractéristique : $r^2 - 4r + 13 = 0$. $\Delta = 16 - 52 = -36 < 0$. Racines complexes : $r = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i$. Donc $p = 2$, $q = 3$. Solutions :

$$y(x) = e^{2x}(\alpha \cos(3x) + \beta \sin(3x)).$$

Application

1 Résoudre :

• $y'' - 5y' + 6y = 0$

• $y'' + 4y = 0$

• $y'' + 6y' + 9y = 0$

2 Pour $(E) : y'' - 5y' + 6y = 0$, déterminer la solution g vérifiant $g(0) = 1$ et $g'(0) = 2$.

3 Pour $(E) : y'' + 4y = 0$, déterminer la solution g vérifiant $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ et $g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

À faire à la maison

1 Soit $(E) : y'' - 2y' + 5y = 0$.

a. Donner la forme générale des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

b. Déterminer la solution f de (E) vérifiant $f(0) = 0$ et $f'(0) = 2$.

c. Vérifier que $f(x) = e^x \sin(2x)$ et calculer les zéros de f sur $\mathbb{R}$.

2 On pose $\varphi(x) = x^2 + 1$. Montrer que φ est solution particulière de l'équation $(E') : y'' - y = -x^2 + 1$. Déduire toutes les solutions de (E') (*indication : poser $y = z + \varphi$*).

3 **Problème de mécanique.** Un point matériel oscille selon l'équation $x'' + \omega^2 x = 0$ où $\omega > 0$. À l'instant $t = 0$, $x(0) = x_0$ et $x'(0) = v_0$.

a. Déterminer $x(t)$.

b. Vérifier que $x(t)$ peut s'écrire $x(t) = A \cos(\omega t - \varphi)$ pour des constantes $A > 0$ et φ à exprimer en fonction de x_0 , v_0 , ω .