

Table des matières

1	Équations et inéquations du premier degré	2
1.1	Signe du binôme $ax + b$	2
1.2	Valeur absolue et disjonction des cas	3
2	Équations du second degré	3
2.1	Forme canonique	3
2.2	Résolution selon le signe du discriminant	4
2.3	Factorisation du trinôme	5
2.4	Somme et produit des racines	5
3	Signe du trinôme	6
4	Inéquations du second degré	6
5	Équations se ramenant au second degré	7
5.1	Équations bicarrées	7
5.2	Équations avec changement de variable	7
6	Systèmes linéaires à deux inconnues	8
6.1	Forme générale d'un système	8
6.2	Méthodes de résolution	8
6.3	Interprétation graphique	8
7	Inéquations du premier degré à deux inconnues	9
8	Systèmes d'inéquations et régionnement du plan	10

1 Équations et inéquations du premier degré

DÉFINITION

Une **équation du premier degré** à une inconnue est une équation de la forme :

$$ax + b = 0, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0.$$

PROPRIÉTÉ 1

L'équation $ax + b = 0$ (avec $a \neq 0$) admet une *unique* solution :

$$x = -\frac{b}{a}.$$

EXEMPLE

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1 $3x - 7 = 2x + 1.$

2 $5 - 2x = 3x + 10.$

PROPRIÉTÉ

Pour résoudre l'inéquation $ax + b \geq 0$ (ou $\leq, <, >$) :

- Si $a > 0$: $ax + b \geq 0 \iff x \geq -\frac{b}{a}.$
- Si $a < 0$: $ax + b \geq 0 \iff x \leq -\frac{b}{a}$ (le sens de l'inégalité change).

EXEMPLE

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1 $-2x + 5 \leq 3.$

2 $4x - 7 > 2x + 1.$

EXERCICE

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1 $3x - 7 = 2x + 5;$

2 $-2x + 1 \geq 9;$

3 $4x + 3 < 6x - 5.$

1.1 Signe du binôme $ax + b$

PROPRIÉTÉ

Soit $a \neq 0$. Le binôme $ax + b$ s'annule en $x_0 = -\frac{b}{a}$ et son signe est celui de a à droite de x_0 .

$$\begin{array}{c|ccc} x & -\infty & x_0 & +\infty \\ \hline ax + b & -\operatorname{sgn}(a) & 0 & \operatorname{sgn}(a) \end{array}$$

Ce tableau permet d'étudier rapidement le signe d'un produit ou d'un quotient de binômes.

EXEMPLE

Étudier le signe des expressions suivantes :

1 $(2x - 3)(5 - x)$.

2 $\frac{3x + 6}{1 - 2x}$.

1.2 Valeur absolue et disjonction des cas

PROPRIÉTÉ

Pour $a \geq 0$ et $u \in \mathbb{R}$:

- $|u| = a$ équivaut à $u = a$ ou $u = -a$.
- $|u| \leq a$ équivaut à $-a \leq u \leq a$.
- $|u| \geq a$ équivaut à $u \leq -a$ ou $u \geq a$.

Ces équivalences permettent de résoudre des équations et des inéquations simples en distinguant les cas nécessaires.

EXEMPLE

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1 $|2x - 3| = 5$.

2 $|x + 1| \leq 4$.

3 $|3x - 2| > 7$.

2 Équations du second degré

DÉFINITION 1

Une **équation du second degré** à une inconnue est une équation de la forme :

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0.$$

L'expression $ax^2 + bx + c$ est appelée **trinôme du second degré**.

2.1 Forme canonique

PROPRIÉTÉ 2

Soit $a \neq 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right].$$

DÉFINITION

Le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé **discriminant** de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

2.2 Résolution selon le signe du discriminant

THÉORÈME 1

Soit l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$: l'équation admet *deux* solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Si $\Delta = 0$: l'équation admet une *unique* solution (dite double) :

$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

- Si $\Delta < 0$: l'équation n'admet *aucune* solution dans $\mathbb{R}$.

EXEMPLE

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes en précisant le signe du discriminant :

1 $2x^2 - 5x + 2 = 0.$

2 $x^2 - 6x + 9 = 0.$

3 $x^2 + x + 1 = 0.$

2.3 Factorisation du trinôme

PROPRIÉTÉ 3

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

- Si $\Delta > 0$ et x_1, x_2 sont les deux racines, alors :

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

- Si $\Delta = 0$ et x_0 est la racine double, alors :

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2.$$

- Si $\Delta < 0$, le trinôme n'est pas factorisable dans $\mathbb{R}$.

2.4 Somme et produit des racines

THÉORÈME 2

Si $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux racines x_1 et x_2 comptées avec leur multiplicité, alors :

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad P = x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}.$$

REMARQUE

Réciproque : si deux nombres ont pour somme S et produit P , alors ils sont les solutions de l'équation :

$$X^2 - SX + P = 0.$$

EXEMPLE

Sans calculer les racines des équations suivantes, déterminer leur somme et leur produit, puis vérifier qu'elles admettent des racines réelles :

1 $2x^2 - 5x + 2 = 0.$

2 $3x^2 + x - 2 = 0.$

EXERCICE

1 Résoudre dans $\mathbb{R}$: $x^2 - 5x + 6 = 0$.

2 Résoudre dans $\mathbb{R}$: $x^2 + 4x + 4 = 0$, puis $x^2 + x + 1 = 0$.

3 Sans calculer les racines, donner leur somme et leur produit pour l'équation $2x^2 - 7x + 3 = 0$.

3 Signe du trinôme

THÉORÈME 3

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$.

Si $\Delta > 0$ (racines $x_1 < x_2$) :

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$f(x)$	signe de a	0	signe de $-a$	signe de a

Si $\Delta = 0$ (racine double x_0) : $f(x)$ est du signe de a pour tout $x \neq x_0$, nul en x_0 .

Si $\Delta < 0$: $f(x)$ est du signe de a pour tout $x \in \mathbb{R}$.

REMARQUE

Mnémotechnique : « extérieur du signe de a , intérieur du signe contraire ».

EXEMPLE

Étudier le signe des trinômes suivants et dresser leur tableau de signes :

1 $f(x) = -x^2 + 3x - 2$.

2 $g(x) = 2x^2 + x + 3$.

EXERCICE

Étudier le signe de chacune des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$:

1 $f(x) = x^2 - 4$;

3 $h(x) = x^2 + 2x + 5$.

2 $g(x) = -x^2 + 5x - 6$;

4 Inéquations du second degré

REMARQUE

Méthode : pour résoudre $ax^2 + bx + c \geq 0$ (ou $\leq, <, >$) :

1 Calculer Δ , trouver les racines (s'il y en a).

2 Dresser le tableau de signes.

3 Lire les solutions sur le tableau.

EXEMPLE

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^2 - 5x + 6 > 0$ en utilisant un tableau de signes.

EXEMPLE

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $-x^2 + 4x - 4 \geq 0$ en utilisant un tableau de signes.

EXERCICE

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1 $x^2 - x - 6 \leq 0$;

2 $-2x^2 + 8 > 0$;

3 $x^2 - 6x + 9 > 0$.

5 Équations se ramenant au second degré

5.1 Équations bicarrées

DÉFINITION

Une équation **bicarrée** est de la forme :

$$ax^4 + bx^2 + c = 0, \quad a \neq 0.$$

REMARQUE

Méthode : on pose $X = x^2$ (donc $X \geq 0$). L'équation devient $aX^2 + bX + c = 0$. On résout en X , puis pour chaque solution $X \geq 0$, on revient à $x = \pm\sqrt{X}$.

EXEMPLE

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ en posant $X = x^2$.

5.2 Équations avec changement de variable

EXEMPLE

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(x-1)^2 - 3(x-1) + 2 = 0$ en choisissant un changement de variable adapté.

EXERCICE

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1 $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$;

2 $\sqrt{x+1} = x-1$;

3 $\frac{2x-1}{x+2} = 3$.

6 Systèmes linéaires à deux inconnues

6.1 Forme générale d'un système

DÉFINITION 2

Un système linéaire de deux équations à deux inconnues est de la forme :

$$(S) : \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

où $a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{R}$, $(a, b) \neq (0, 0)$, $(a', b') \neq (0, 0)$.

DÉFINITION

Le **déterminant** du système (S) est :

$$\det(S) = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b.$$

THÉORÈME 4

- Si $\det(S) \neq 0$: le système admet une unique solution $(x_0; y_0)$.
- Si $\det(S) = 0$: le système n'admet aucune solution ou en admet une infinité (selon les coefficients c, c').

6.2 Méthodes de résolution

REMARQUE

- **Substitution** : exprimer une inconnue en fonction de l'autre dans une équation, substituer dans la seconde.
- **Combinaison linéaire** : multiplier les équations par des constantes pour éliminer une inconnue par addition.
- **Cramer** (cas $\det(S) \neq 0$) :

$$x_0 = \frac{1}{\det(S)} \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}, \quad y_0 = \frac{1}{\det(S)} \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}.$$

6.3 Interprétation graphique

PROPRIÉTÉ

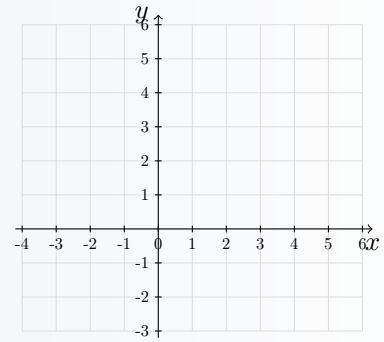
Chaque équation du système représente une droite. Les solutions du système sont les coordonnées des points communs aux deux droites :

- droites sécantes : une solution ;
- droites parallèles distinctes : aucune solution ;
- droites confondues : une infinité de solutions.

EXEMPLE

Résoudre graphiquement, puis par substitution, le système

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - y = 2. \end{cases}$$



Comparer les deux résultats.

EXERCICE

Résoudre les systèmes suivants par deux méthodes différentes :

$$1 \quad \begin{cases} 4x + 3y = 18 \\ 2x - y = 4 \end{cases}.$$

$$2 \quad \begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ x + y = 4 \end{cases}.$$

7 Inéquations du premier degré à deux inconnues

DÉFINITION 3

Une **inéquation du premier degré à deux inconnues** s'écrit

$$ax + by + c \geq 0,$$

ou avec l'un des signes $\leq$, $<$ ou $>$, où $(a, b) \neq (0, 0)$. Sa frontière est la droite d'équation $ax + by + c = 0$.

PROPRIÉTÉ

La droite frontière partage le plan en deux demi plans. Pour déterminer le demi plan solution :

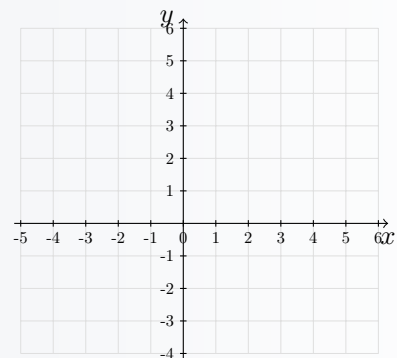
- 1 Tracer la droite frontière. Elle est incluse pour $\leq$ ou $\geq$ et exclue pour $<$ ou $>$.
- 2 Choisir un point test qui n'appartient pas à la droite, souvent l'origine.
- 3 Remplacer ses coordonnées dans l'inéquation, puis conserver ou rejeter le demi plan qui le contient.

EXEMPLE

Dans le repère ci-dessous, représenter successivement les ensembles de points $M(x; y)$ vérifiant :

$$1 \quad 2x + y \leq 4.$$

$$2 \quad x - 2y > 2.$$



Préciser dans chaque cas si la droite frontière appartient à l'ensemble solution.

EXERCICE

Représenter graphiquement les solutions de $3x - 2y + 6 \geq 0$, puis déterminer si les points $A(0;0)$, $B(-2;1)$ et $C(2;5)$ appartiennent à cet ensemble.

8 Systèmes d'inéquations et régionnement du plan

DÉFINITION

Résoudre graphiquement un système d'inéquations du premier degré à deux inconnues consiste à intersecter les demi plans solutions de toutes ses inéquations. La partie commune est appelée **région admissible**.

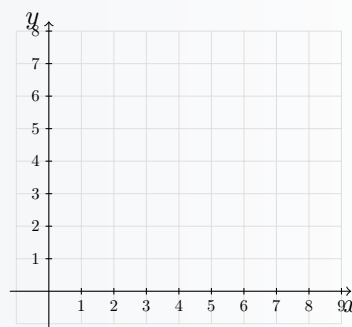
REMARQUE

Une contrainte comme $x \geq 0$ impose le demi plan situé à droite de l'axe des ordonnées. Une contrainte comme $y \geq 0$ impose le demi plan situé au dessus de l'axe des abscisses.

EXEMPLE

Représenter dans le repère ci-dessous la région admissible du système, puis déterminer les coordonnées de ses sommets :

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ x + y \leq 6, \\ 2x + y \leq 8. \end{cases}$$



EXERCICE

Représenter la région admissible du système

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ x + 2y \leq 8, \\ 3x + y \leq 9. \end{cases}$$

Déterminer graphiquement puis algébriquement les coordonnées de ses sommets.

À retenir

PROPRIÉTÉ

- Une équation ou une inéquation se résout dans un ensemble précisé.
- La factorisation et le discriminant permettent d'étudier un trinôme.
- Un système linéaire se résout par substitution, combinaison ou déterminant.
- Une inéquation à deux inconnues définit un demi plan.
- Un système d'inéquations définit l'intersection de plusieurs demi plans.