

Série d'exercices — Étude de fonctions

1^{ère} BAC SX BIOF

En. Nidal SABI

Exercice 1

Étudier les branches infinies des courbes des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$
2. $g(x) = \sqrt{x^2 + x}$

3. $h(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + 1}$
4. $k(x) = x^3 - 3x + 1$

Exercice 2

Soit f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 4}{x - 2}$.

- Déterminer les réels a, b, c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 2}$.
- En déduire que la droite $(D) : y = x - 1$ est asymptote oblique à (C_f) .
- Étudier la position relative de (C_f) et (D) .

Exercice 3

Étudier la convexité et déterminer les points d'inflexion éventuels des fonctions suivantes :

- $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.
- $g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$.
- $h(x) = (x - 1)^4$.

Exercice 4

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$.

- Calculer $f'(x)$, étudier son signe et dresser le tableau de variations de f .
- Calculer $f''(x)$, étudier son signe et déterminer les points d'inflexion.
- Tracer la courbe (C_f) .

Exercice 5

Étude complète de $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$:

- Étudier la parité de f .
- Déterminer les limites de f aux bornes.
- Étudier les variations de f .
- Tracer la courbe (C_f) .

Exercice 6

Étude complète de $f(x) = \frac{2x - 3}{x - 1}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$:

1. Déterminer les limites aux bornes.
2. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
3. Dresser le tableau de variations.
4. Donner les asymptotes et tracer (C_f) .

Exercice 7

Étude complète de $f(x) = x + \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$:

1. Étudier la parité.
2. Calculer les limites aux bornes.
3. Étudier la branche infinie en $+\infty$: montrer que la droite $(D) : y = x$ est asymptote.
4. Étudier les variations et tracer (C_f) .

Exercice 8

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

1. Étudier la parité et les limites en $\pm\infty$.
2. Montrer que la droite $(D_1) : y = x$ est asymptote oblique en $+\infty$ et $(D_2) : y = -x$ en $-\infty$.
3. Étudier les variations et tracer (C_f) .

Exercice 9

Étude complète de $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$:

1. Déterminer le domaine de définition.
2. Étudier la parité.
3. Effectuer la division euclidienne et déduire l'asymptote oblique.
4. Calculer $f'(x)$, étudier son signe et tracer (C_f) .

Exercice 10

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 - 1)^2$.

1. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
2. Étudier les variations de f et déterminer ses extremums.
3. Étudier la convexité de f et déterminer les points d'inflexion.
4. Tracer (C_f) .

Exercice 11

Soit f définie sur $[-1; +\infty[$ par $f(x) = (x + 1)\sqrt{x + 1}$.

1. Étudier la dérivabilité de f en -1 .
2. Calculer $f'(x)$ pour $x > -1$ et étudier son signe.
3. Étudier la branche infinie en $+\infty$.
4. Tracer (C_f) .

Exercice 12

Soit f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$.

1. Effectuer la division euclidienne pour montrer que $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x+1}$.
2. En déduire que (C_f) admet une asymptote oblique d'équation $y = x - 1$.
3. Étudier les variations de f et déterminer ses extremums locaux.
4. Donner le tableau de variations complet et tracer (C_f) .