

Étude des Fonctions

1^{ère} Année Baccalauréat – Sciences Mathématiques

Volume horaire officiel : 11h (cf. répartition 2013) – **Pré-requis** : généralités sur les fonctions, limites, dérivation, trigonométrie.

Capacités attendues : résoudre graphiquement des équations et inéquations ; utiliser la périodicité et les éléments de symétrie pour réduire le domaine d'étude ; utiliser le signe de la dérivée seconde pour étudier la concavité et déterminer les points d'inflexion ; étudier et représenter des fonctions polynômes, rationnelles, irrationnelles ; étudier et représenter des fonctions trigonométriques simples.

Table des matières

1	Plan d'étude d'une fonction	2
1.1	Schéma général	2
1.2	Réduction du domaine d'étude	2
1.3	Éléments de symétrie	2
2	Asymptotes et branches infinies	3
2.1	Asymptote horizontale	3
2.2	Asymptote verticale	3
2.3	Asymptote oblique	3
2.4	Branche parabolique et branche infinie	4
3	Concavité et points d'inflexion	5
3.1	Dérivée seconde	5
3.2	Concavité	5
3.3	Points d'inflexion	5
4	Études complètes types	6
4.1	Fonction polynôme	6
4.2	Fonction rationnelle	6
4.3	Fonction irrationnelle	6
4.4	Fonction trigonométrique simple	7
5	Synthèse	8
5.1	Récapitulatif des notions	8
5.2	Pièges classiques	8

1. Plan d'étude d'une fonction

1.1 Schéma général

Méthode

Plan d'étude d'une fonction f :

1. **Ensemble de définition** $\mathcal{D}_f$.
2. **Parité, périodicité** : réduction éventuelle du domaine d'étude.
3. **Limites** aux bornes de $\mathcal{D}_f$: recherche d'**asymptotes**.
4. **Dérivée** f' , signe de f' , **variations**.
5. **Dérivée seconde** f'' (optionnel), signe : **concavité** et **points d'inflexion**.
6. **Tableau de variations** complet.
7. **Points particuliers** : intersections avec les axes, tangentes remarquables.
8. **Tracé** de la courbe $\mathcal{C}_f$.

1.2 Réduction du domaine d'étude

Propriété

Propriété 1.1 —

- Si f est **paire**, on étudie sur $\mathcal{D}_f \cap [0, +\infty[$, puis on complète par *symétrie par rapport à l'axe des ordonnées*.
- Si f est **impaire**, on étudie sur $\mathcal{D}_f \cap [0, +\infty[$, puis on complète par *symétrie par rapport à l'origine O* .
- Si f est **T -périodique**, on étudie sur un intervalle de longueur T , puis on complète par *translations horizontales* de kT ($k \in \mathbb{Z}$).

1.3 Éléments de symétrie

Propriété

Propriété 1.2 —

- La droite $x = a$ est **axe de symétrie** de $\mathcal{C}_f$ ssi : $(\forall x \in \mathcal{D}_f) \quad 2a - x \in \mathcal{D}_f$ et $f(2a - x) = f(x)$.
- Le point $\Omega(a, b)$ est **centre de symétrie** de $\mathcal{C}_f$ ssi : $(\forall x \in \mathcal{D}_f) \quad 2a - x \in \mathcal{D}_f$ et $f(2a - x) + f(x) = 2b$.

Exemple

Exemple 1.1 — Montrer que $\Omega(1, 0)$ est centre de symétrie de la courbe de $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x - 1}$.

Solution. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Soit $x \in \mathcal{D}_f$; alors $2 - x \neq 1$ ssi $x \neq 1$, OK.

$$f(2 - x) + f(x) = \frac{(2 - x)^2 - 2(2 - x)}{(2 - x) - 1} + \frac{x^2 - 2x}{x - 1}.$$

Après simplification, $f(2 - x) = \frac{x^2 - 2x}{1 - x} = -\frac{x^2 - 2x}{x - 1} = -f(x)$. Donc $f(2 - x) + f(x) = 0 = 2 \cdot 0$.

Conclusion : $\Omega(1, 0)$ est centre de symétrie. $\square$

2. Asymptotes et branches infinies

2.1 Asymptote horizontale

Définition

Définition 2.1 — La courbe $\mathcal{C}_f$ admet une **asymptote horizontale** d'équation $y = \ell$ en $+\infty$ ssi :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell.$$

(Idem en $-\infty$.)

2.2 Asymptote verticale

Définition

Définition 2.2 — La courbe $\mathcal{C}_f$ admet une **asymptote verticale** d'équation $x = a$ ssi :

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty.$$

2.3 Asymptote oblique

Théorème

Théorème 2.1 — La courbe $\mathcal{C}_f$ admet une **asymptote oblique** d'équation $y = ax + b$ en $+\infty$ ssi :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$

Pratiquement, on cherche a et b par :

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad ; \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax].$$

(Idem en $-\infty$.)

Méthode

Pour les fonctions rationnelles, la division euclidienne du numérateur par le dénominateur fait apparaître l'asymptote oblique.

Exemple

Exemple 2.1 — Soit $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$. Division : $\frac{x^2 + 1}{x - 1} = x + 1 + \frac{2}{x - 1}$.

Donc $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (x + 1)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{x - 1} = 0$.

L'asymptote oblique a pour équation $y = x + 1$, en $+\infty$ et $-\infty$.

2.4 Branche parabolique et branche infinie

Définition

Définition 2.3 — Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$:

- Si $a \neq 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = b$ (fini) : asymptote oblique $y = ax + b$.
- Si $a \neq 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = \pm\infty$: **branche parabolique** de direction $y = ax$.
- Si $a = 0$: **branche parabolique** de direction l'axe (Ox) .
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$: **branche parabolique** de direction l'axe (Oy) .

3. Concavité et points d'inflexion

3.1 Dérivée seconde

Définition

Définition 3.1 — Soit f deux fois dérivable sur I . La **dérivée seconde** de f , notée f'' , est la dérivée de f' .

3.2 Concavité

Définition

Définition 3.2 — Soit f deux fois dérivable sur I .

- $\mathcal{C}_f$ est **convexe** (« tournée vers le haut ») sur I ssi $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.
- $\mathcal{C}_f$ est **concave** (« tournée vers le bas ») sur I ssi $f''(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$.

3.3 Points d'inflexion

Définition

Définition 3.3 — Un **point d'inflexion** de $\mathcal{C}_f$ est un point où la concavité *change* : f'' s'annule et change de signe.

Méthode

Pour étudier la concavité de f :

1. Calculer $f''(x)$.
2. Étudier le signe de $f''(x)$.
3. Sur un intervalle où $f'' \geq 0$: $\mathcal{C}_f$ convexe.
4. Sur un intervalle où $f'' \leq 0$: $\mathcal{C}_f$ concave.
5. Points où f'' change de signe : points d'inflexion.

Exemple

Exemple 3.1 — Étudier la concavité de $f(x) = x^3 - 3x$.

Solution. $f'(x) = 3x^2 - 3$, $f''(x) = 6x$.

$f''(x) < 0$ pour $x < 0$: $\mathcal{C}_f$ concave sur $] -\infty, 0]$.

$f''(x) > 0$ pour $x > 0$: $\mathcal{C}_f$ convexe sur $[0, +\infty[$.

$x = 0$: changement de signe, donc **point d'inflexion** $I(0, 0)$.

4. Études complètes types

4.1 Fonction polynôme

Exemple

Exemple 4.1 — Étudier $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

(1) **Domaine.** $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

(2) **Limites.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ (terme dominant x^3).

(3) **Branche.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)/x = +\infty$: branche parabolique de direction (Oy).

(4) **Variations.** $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$.

Signe : $f' > 0$ sur $] -\infty, 0[\cup]2, +\infty[$, $f' < 0$ sur $]0, 2[$.

$f(0) = 2$ (maximum local), $f(2) = -2$ (minimum local).

(5) **Concavité.** $f''(x) = 6x - 6$ s'annule en $x = 1$.

f'' négatif pour $x < 1$, positif pour $x > 1$: point d'inflexion $I(1, 0)$.

(6) **Tableau :**

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$				
$f'(x)$		+	0	-	0	+			
$f''(x)$		-	-	0	+	+			
f	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

4.2 Fonction rationnelle

Exemple

Exemple 4.2 — Étudier $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 1}$.

(1) **Domaine.** $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

(2) **Division.** $f(x) = x + 1 - \frac{3}{x - 1}$.

(3) **Asymptotes.**

• $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$ ($-3/0^-$), $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$: **asymptote verticale** $x = 1$.

• $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (x + 1)] = 0$: **asymptote oblique** $y = x + 1$.

(4) **Variations.** $f'(x) = 1 + \frac{3}{(x - 1)^2} > 0$ partout sur $\mathcal{D}_f$.

Donc f est strictement croissante sur $] -\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.

(5) **Tableau :** direct à partir de ce qui précède.

4.3 Fonction irrationnelle

Exemple

Exemple 4.3 — Étudier $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. f est paire.

$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$; signe de x .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 0$ (par quantité conjuguée).

Donc asymptote oblique $y = x$ en $+\infty$, et $y = -x$ en $-\infty$ (par parité).

4.4 Fonction trigonométrique simple

Exemple

Exemple 4.4 — Étudier $f(x) = \cos x - \sin x$ sur $[0, 2\pi]$.

$f(x) = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. Donc f est 2π -périodique, $f(x) \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

$f'(x) = -\sin x - \cos x = -\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

$f'(x) = 0$ pour $x + \frac{\pi}{4} = k\pi$, soit $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$; dans $[0, 2\pi]$: $x = \frac{3\pi}{4}$ et $x = \frac{7\pi}{4}$.

Variations sur $[0, 2\pi]$: décroissance de 1 à $-\sqrt{2}$ sur $[0, 3\pi/4]$, croissance jusqu'à $\sqrt{2}$ sur $[3\pi/4, 7\pi/4]$, décroissance jusqu'à 1 sur $[7\pi/4, 2\pi]$.

5. Synthèse

5.1 Récapitulatif des notions

Notion	Caractérisation
Asymptote horizontale $y = \ell$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \ell$
Asymptote verticale $x = a$	$\lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x) = \pm\infty$
Asymptote oblique $y = ax + b$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$
Convexité	$f'' \geq 0$
Concavité	$f'' \leq 0$
Point d'inflexion	f'' s'annule et change de signe
Axe de symétrie $x = a$	$f(2a - x) = f(x)$
Centre de symétrie $\Omega(a, b)$	$f(2a - x) + f(x) = 2b$

5.2 Pièges classiques

Remarque

1. **Asymptote oblique en $+\infty$ et $-\infty$.** Elles peuvent être différentes (cas typique : $\sqrt{x^2 + 1}$).
2. **Point d'inflexion sans changement de concavité.** $f''(x_0) = 0$ n'implique pas point d'inflexion (cf. $f(x) = x^4$).
3. **Concavité et croissance.** Concavité ne signifie pas décroissance ; ce sont deux notions distinctes.
4. **Axe vs centre de symétrie.** Ne pas confondre les relations $f(2a - x) = f(x)$ et $f(2a - x) + f(x) = 2b$.
5. **Réduire le domaine.** Toujours préciser la transformation appliquée pour compléter la courbe.