

Table des matières

I. Branches infinies	2
II. Convexité et concavité	4
III. Éléments de symétrie	5

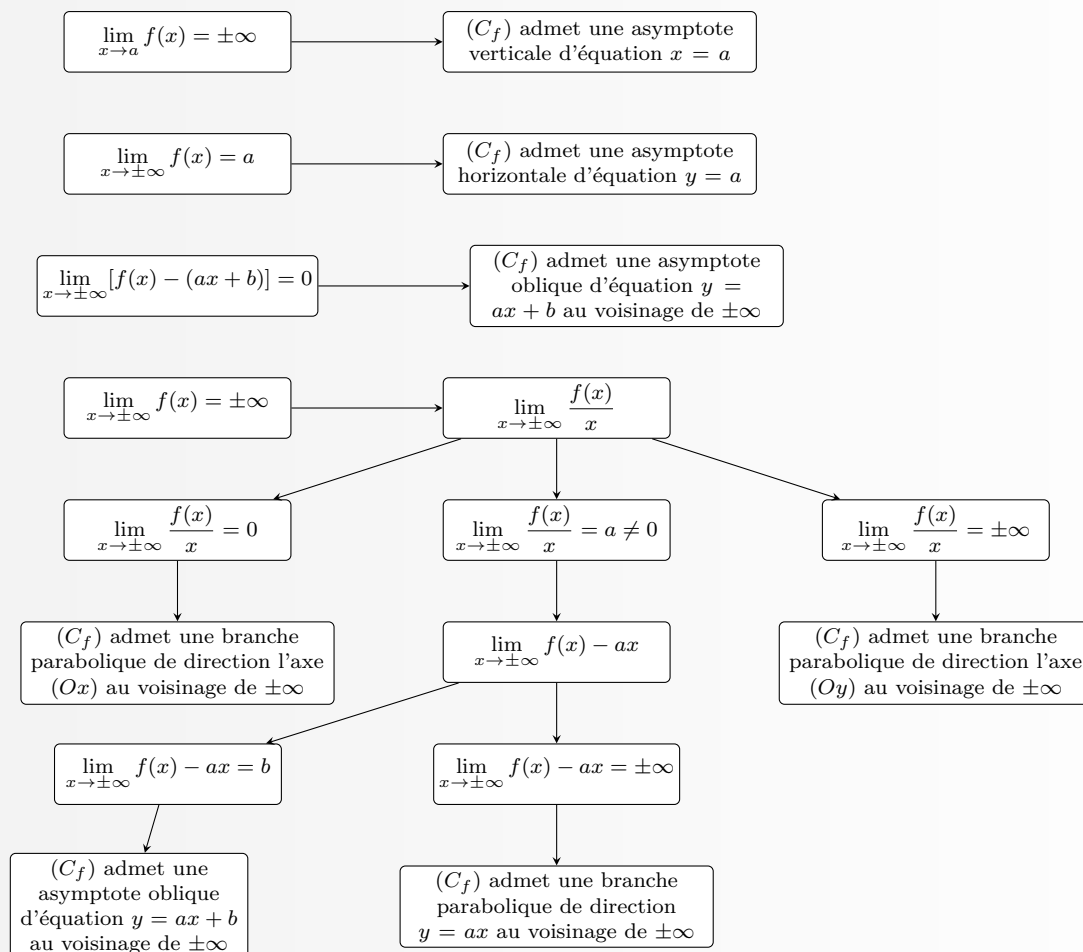
Dans tout le chapitre, le plan est muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

I. Branches infinies

Soit f une fonction numérique et (C_f) sa courbe représentative. L'étude des branches infinies de (C_f) consiste à déterminer le comportement de (C_f) au voisinage des bornes infinies du domaine et au voisinage des valeurs où f admet une limite infinie. Le schéma ci-dessous récapitule tous les cas possibles.

Remarque

Schéma récapitulatif des branches infinies.



Exemple

On considère les fonctions f , g , h , k et m définies respectivement par :

$$f(x) = \frac{3x^2 + x - 2}{x^2 - 4}, \quad g(x) = \frac{x^2}{2x + 3}, \quad h(x) = 3x^2 - 2x + 1, \quad k(x) = \sqrt{3x - 2}, \quad m(x) = 2x + \sqrt{x}.$$

1. Pour la fonction f :

- Calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x)$. Que peut-on en déduire concernant (C_f) ?
- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Que peut-on en déduire ?

2. Pour la fonction g :

- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$.
- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[g(x) - \frac{1}{2}x \right]$.
- En déduire la nature de la branche infinie de (C_g) au voisinage de $+\infty$.

3. Pour la fonction h :

- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x}$.
- Que peut-on en déduire concernant la branche infinie de (C_h) au voisinage de $+\infty$?

4. Pour la fonction k :

- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{k(x)}{x}$.
- En déduire la nature de la branche infinie de (C_k) au voisinage de $+\infty$.

5. Pour la fonction m :

- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} m(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{m(x)}{x}$.
- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} [m(x) - 2x]$.
- Que peut-on en déduire ?

Application

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par son tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$f(x)$	1	3	$+\infty$	1

Déterminer, à partir du tableau, toutes les asymptotes de la courbe (C_f) .

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par $f(x) = \frac{2x^2 - 7x + 8}{x - 3}$.

- Déterminer les réels a , b et c tels que pour tout $x \neq 3$: $f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 3}$.
- En déduire que la droite $(D) : y = 2x - 1$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $\pm\infty$.
- Étudier la position relative de (C_f) et de (D) .

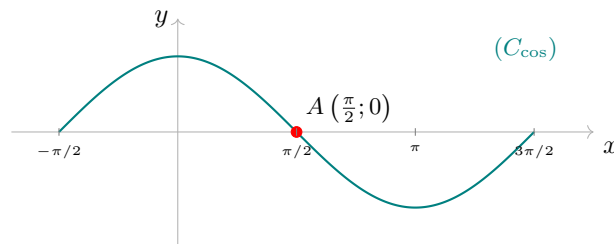
3. Soit f la fonction définie sur $[-1; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x + 1} - 2x$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1}$. Étudier les branches infinies de (C_f) et (C_g) au voisinage de $+\infty$.

II. Convexité et concavité

Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- On dit que (C_f) est *convexe* sur I si (C_f) est située au-dessus de chacune de ses tangentes.
- On dit que (C_f) est *concave* sur I si (C_f) est située au-dessous de chacune de ses tangentes.
- Le point $A(a; f(a))$ est un *point d'inflexion* de (C_f) si la courbe traverse sa tangente en ce point.



La courbe de la fonction $\cos$ ci-dessus est concave sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ et convexe sur $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, et $A\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$ est un point d'inflexion de $(C_{\cos})$.

Propriété

Soient f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I , (C_f) sa courbe représentative et $a \in I$.

- Si $f'' \geq 0$ sur I , alors (C_f) est convexe sur I .
- Si $f'' \leq 0$ sur I , alors (C_f) est concave sur I .
- Si f'' s'annule en a en changeant de signe, alors $A(a; f(a))$ est un point d'inflexion de (C_f) .

Exemple

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1 \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{12}x^4 - 2x^2 + 3x + 5.$$

1. Étude de f :

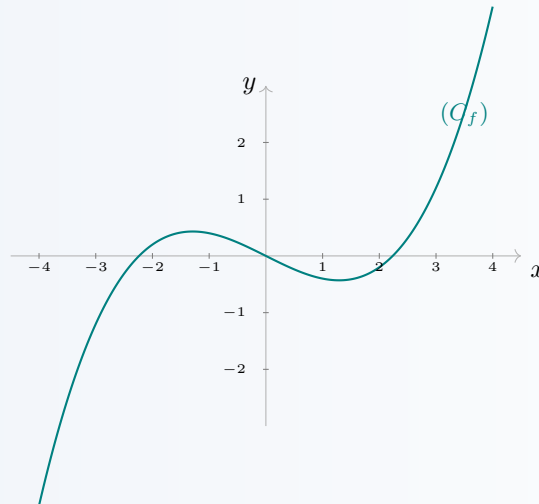
- Calculer $f'(x)$ puis $f''(x)$.
- Étudier le signe de $f''(x)$ sur $\mathbb{R}$.
- En déduire les intervalles sur lesquels (C_f) est convexe et ceux sur lesquels elle est concave.
- Déterminer le point d'inflexion de (C_f) .

2. Étude de g :

- Calculer $g'(x)$ puis $g''(x)$.
- Factoriser $g''(x)$ et dresser son tableau de signe sur $\mathbb{R}$.
- En déduire les intervalles de convexité et de concavité de (C_g) .
- Préciser les coordonnées des points d'inflexion de (C_g) .

Application

1. La figure ci-dessous représente la courbe (C_f) d'une fonction f deux fois dérivable sur $[-4; 4]$.



Par lecture graphique, déterminer les intervalles sur lesquels (C_f) est convexe, ceux sur lesquels elle est concave, et les abscisses des points d'inflexion.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = x + \frac{1}{x-1}$.
- Montrer que $f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$ pour tout $x \neq 1$.
 - Étudier la concavité de (C_f) sur $] -\infty; 1[$ puis sur $]1; +\infty[$.
 - (C_f) admet-elle un point d'inflexion ? Justifier.
3. Soit $f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 - x + 2$ définie sur $\mathbb{R}$.
- Calculer $f''(x)$ et dresser son tableau de signe.
 - Déterminer les points d'inflexion éventuels de (C_f) et préciser leurs coordonnées.

III. Éléments de symétrie

Propriété

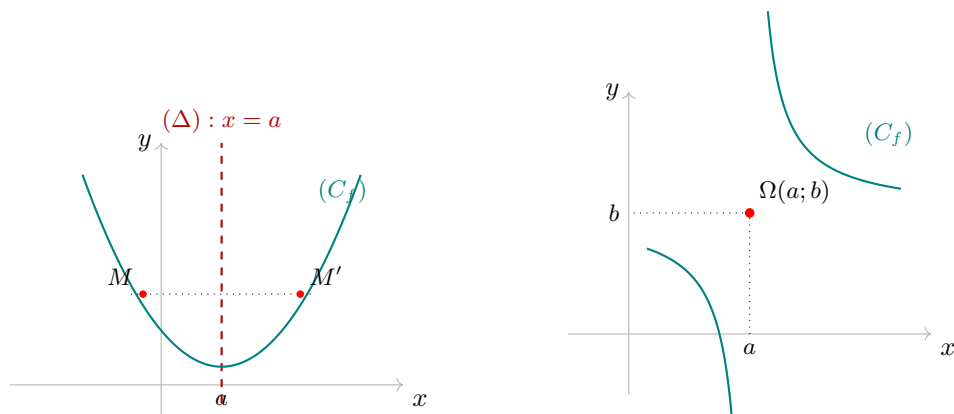
Soit f une fonction définie sur un ensemble D et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- La droite (Δ) d'équation $x = a$ (avec $a \in \mathbb{R}$) est un *axe de symétrie* de (C_f) si et seulement si :

$$\begin{cases} (\forall x \in D); (2a - x) \in D \\ (\forall x \in D); f(2a - x) = f(x) \end{cases}$$

- Le point $\Omega(a; b)$ (avec $(a; b) \in \mathbb{R}^2$) est un *centre de symétrie* de (C_f) si et seulement si :

$$\begin{cases} (\forall x \in D); (2a - x) \in D \\ (\forall x \in D); f(2a - x) + f(x) = 2b \end{cases}$$



Exemple

On considère les fonctions f et g définies respectivement par :

$$f(x) = x^2 + x + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x}{x-1}.$$

1. Soit (Δ) la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$.
 - a. Déterminer le domaine D_f de f .
 - b. Vérifier que pour tout $x \in D_f : 2\left(-\frac{1}{2}\right) - x \in D_f$.
 - c. Calculer $f(-1-x)$ et comparer avec $f(x)$.
 - d. En déduire que (Δ) est un axe de symétrie de (C_f) .
2. Soit Ω le point de coordonnées $(1; 1)$.
 - a. Déterminer le domaine D_g de g .
 - b. Vérifier que pour tout $x \in D_g : 2(1) - x \in D_g$.
 - c. Calculer $g(2-x) + g(x)$ et comparer avec $2 \cdot 1$.
 - d. En déduire que Ω est un centre de symétrie de (C_g) .

Application

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 6x + 5$.
 - a. Écrire $f(x)$ sous forme canonique.
 - b. Montrer que la droite $(D) : x = 3$ est un axe de symétrie de (C_f) .
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x + 1}$.
 - a. Montrer que pour tout $x \neq -1 : f(x) = x + 1 + \frac{2}{x + 1}$.
 - b. En déduire que $\Omega(-1; 0)$ est un centre de symétrie de (C_f) .
3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 + 6x^2 + 3x + 3$.
 - a. Montrer que $\Omega(-1; 4)$ est un centre de symétrie de (C_f) .
 - b. Sachant que l'on connaît l'étude de f sur $[-1; +\infty[$, expliquer comment en déduire directement le comportement de f sur $] -\infty; -1]$.