

Série d'exercices — Chapitre 7 : La fonction exponentielle

2^e BAC SX BIOF

En. Nidal SABI

Exercice 1 — Équations et inéquations exponentielles

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $e^{2x} = 1$

2. $3e^{x-2} = 1$

3. $e^{2x} - e^x - 2 = 0$

4. $2e^{2x} - 5e^x + 3 = 0$

5. $e^x + 4e^{-x} = 4$

6. $(e^x - 1)(e^x - 2) < 0$

7. $\frac{e^{2x} - 4}{1 - e^x} \geq 0$

8. $\ln(3e^x - 1) > 5$

9. $3^x = 6$

10. $7^x - 3 + 2 \cdot 7^{-x} \leq 0$

Exercice 2 — Calcul de dérivées

Justifier la dérivabilité et calculer $f'(x)$:

1. $f_1(x) = e^{2x^2-3x+5}$

2. $f_2(x) = x^3 e^{1/x}$

3. $f_3(x) = (x-1)e^{\sqrt{x^2-x}}$

4. $f_4(x) = \frac{e^x}{x-2}$

5. $f_5(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)$

6. $f_6(x) = 2^x + 3^x$

Exercice 3 — Primitives

Déterminer une primitive de chaque fonction sur un intervalle approprié :

1. $f_1(x) = e^{2x+5}$

2. $f_2(x) = x e^{x^2}$

3. $f_3(x) = \frac{3e^x}{\sqrt{2e^x + 1}}$

4. $f_4(x) = \frac{-e^x}{(e^x - 1)^2}$

5. $f_5(x) = (x^3 - x)e^{x^4-2x^2+1}$

6. $f_6(x) = \frac{e^x}{e^x + 2}$

Exercice 4 — Primitive avec condition initiale

Soit $f(x) = \frac{8 - e^x}{e^x + 2}$ sur $\mathbb{R}$.

1. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 4 - \frac{5e^x}{e^x + 2}$.

2. Déterminer la primitive F de f telle que $F(\ln 2) = -6 \ln 2$.

Exercice 5 — Calcul de limites

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x)$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}}$

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 e^{2x}$

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - x}{e^x + x^2}$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{2x}$

6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x + 1)}{e^x}$

7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{1/x} - 1)$

8. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \frac{1}{x}\right) e^{2x}$

Exercice 6 — Étude avec centre de symétrie

Soit f définie par $f(x) = x + 2 + \frac{4}{e^x - 1}$.

1. Déterminer D_f .
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.
3. Montrer que $f(x) + f(-x) = 4$. En déduire que $I(0; 2)$ est centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.
4. Étudier les variations de f et dresser le tableau.
5. Étudier les branches infinies de $(\mathcal{C}_f)$.

Exercice 7 — Étude $(x+1)e^{-x} - 1$ + discussion paramétrique

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)e^{-x} - 1$.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
2. Étudier les branches infinies de $(\mathcal{C}_f)$.
3. Calculer $f'(x)$, étudier son signe et dresser le tableau de variations.
4. Étudier la convexité de $(\mathcal{C}_f)$ et déterminer ses points d'inflexion.
5. Discuter, selon le réel m , le nombre de solutions de l'équation $(1+x) = (m+1)e^x$.

Exercice 8 — Fonction de base $a : 4^x - 2^x$

Soit $f(x) = 4^x - 2^x$ sur $\mathbb{R}$.

1. Réécrire $f(x)$ en posant $X = 2^x$ et factoriser.
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement.
3. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
4. Dresser le tableau de variations de f et préciser le minimum.

Exercice 9 — Fonction auxiliaire + étude de f

Partie A. Soit $g(x) = 2e^x - 2x - 2$ sur $\mathbb{R}$.

1. Étudier les variations de g .
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geq 0$.

Partie B. Soit $f(x) = 2e^{2x} - 4xe^x - 2$ sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement.
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.
3. Montrer que $f'(x) = 2g(x)e^x$. En déduire que f est croissante sur $\mathbb{R}$.
4. Calculer $f'(0)$ et écrire l'équation de la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ en 0.

Exercice 10 — Synthèse : étude + asymptote + suite récurrente

Partie A. Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - x^2 + 3x - 1$. On admet que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

1. Vérifier que $g(0) = 0$.
2. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $] -\infty; 0]$ et $[0; +\infty[$.

Partie B. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 - x)e^{-x} + x$.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$. En déduire que $(D) : y = x$ est asymptote oblique de $(\mathcal{C}_f)$ en $+\infty$.

2. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter.
3. Montrer que $f(x) - x$ a le même signe que $x^2 - x$. En déduire la position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à (D) .
4. Montrer que $f'(x) = g(x)e^{-x}$ et dresser le tableau de variations de f .
5. Montrer que $f''(x) = (x^2 - 5x + 4)e^{-x}$ et déterminer les points d'inflexion.

Partie C. Soit (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer par récurrence que $0 \leq u_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Étudier la monotonie de (u_n) et conclure quant à la convergence. Déterminer la limite.