



Table des matières

1 La fonction exponentielle

Activité

On a vu que la fonction $\ln$ est continue et strictement croissante de $]0; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$. Elle admet donc une réciproque sur $\mathbb{R}$, qui sera appelée *fonction exponentielle*.

Définition

La *fonction exponentielle naturelle*, notée $\exp$, est la réciproque de $\ln$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in]0; +\infty[$:

$$\exp(x) = y \iff x = \ln(y).$$

On note $\exp(x) = e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Conséquences

- $D_{\exp} = \mathbb{R}; \forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$.
- $e^0 = 1, e^1 = e$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(e^x) = x$ et $\forall y > 0, e^{\ln y} = y$.
- $\exp$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Propriété

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$:

- $e^a = e^b \iff a = b$.
- $e^a < e^b \iff a < b$.

1.1 Propriétés algébriques

propriétés

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{Q}$.

- $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$
- $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
- $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$
- $(e^x)^r = e^{rx}$

Exemple

« Résolution d'une équation. »

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $(e^x)^2 - 3e^x + 2 = 0$.

Solution. On pose $X = e^x > 0$. L'équation devient $X^2 - 3X + 2 = 0$, soit $(X - 1)(X - 2) = 0$. Donc $X = 1$ ou $X = 2$. D'où $e^x = 1$ ou $e^x = 2$, c.-à-d. $x = 0$ ou $x = \ln 2$. $S = \{0; \ln 2\}$.

Application

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

- $e^{1-x} = e^{x-x^2}$
- $(e^x)^2 - 3e^x + 2 < 0$
- $\frac{e^{2x+1}}{e^{x-3}} > e^{-x+2}$
- $e^{x^2-x} = 1$
- $e^x + 6e^{-x} - 5 = 0$
- $(e^x + 2)(e^{-x+1} - 4) \geq 0$

À faire à la maison

- 1 Résoudre dans $\mathbb{R}$: (a) $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$; (b) $e^{x+2} - 3e^x = 4$.
- 2 Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système :
$$\begin{cases} 5e^{2x+1} + 3e^{-y} = 17 \\ 7e^{2x+1} - 4e^{-y} = -9 \end{cases}.$$
- 3 Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$, puis simplifier $\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2 + \left(\frac{2}{e^x + e^{-x}}\right)^2$.

2 Limites de référence

propriétés

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty, n \in \mathbb{N}^*$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0, n \in \mathbb{N}^*$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Exemple

« Limite avec croissance comparée. »

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x)$.

Solution. On factorise : $e^x - x = e^x \left(1 - \frac{x}{e^x}\right)$. Or $\frac{x}{e^x} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$, donc $1 - \frac{x}{e^x} \rightarrow 1$. Et $e^x \rightarrow +\infty$. Par produit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x) = +\infty$.

Application

Calculer les limites :

1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} e^{-x})$

3 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{e^{3x} - 1}$

5 $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x e^{3x}$

2 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$

4 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

6 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{x^3 + x + 1}$

À faire à la maison

- 1 Calculer les limites :

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - \sqrt{x})$

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{x^3 + x + 1}$

c. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{-x}}{x}$

d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x+4}{x}}$

- 2 Soit $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.

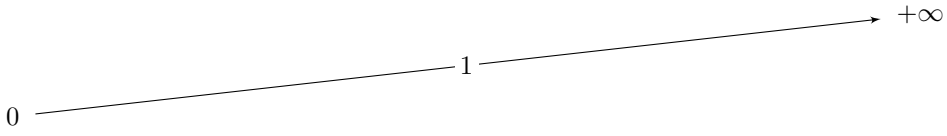
a. Montrer que f est continue en 0.

b. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

3 Étude et représentation graphique de $\exp$

3.1 Tableau de variations

$\exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, $(e^x)' = e^x > 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, $e^0 = 1$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$(e^x)'$		$+$	
$\exp$			

3.2 Branches infinies et courbe

- En $-\infty$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$, donc l'axe (Ox) est asymptote horizontale.
- En $+\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, donc branche parabolique de direction (Oy) .

Remarque

Les courbes de $\ln$ et $\exp$ sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.

4 Dérivée de $\exp$ et de e^u

Propriété

- $\exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $(e^x)' = e^x$.
- Si u est dérivable sur un intervalle I , alors $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et :

$$\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x) e^{u(x)}.$$

Exemple

« Dérivée d'une exponentielle composée. »

Calculer la dérivée de $f(x) = e^{x^2+3x}$ sur $\mathbb{R}$.

Solution. On pose $u(x) = x^2 + 3x$, donc $u'(x) = 2x + 3$. D'après la formule :

$$f'(x) = (2x + 3) e^{x^2+3x}.$$

Application

Calculer la dérivée de chaque fonction :

- $f_1(x) = e^{\sqrt{x}}$
- $f_2(x) = e^{x-2 \ln(x+1)}$
- $f_3(x) = (e^{2x} - e^{-x})^2$
- $f_4(x) = e^{\sqrt[3]{x}}$

À faire à la maison

1 Calculer la dérivée de chaque fonction :

- $f_1(x) = (x^2 - x + 1)e^{-x}$
- $f_2(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

- $f_3(x) = e^x \sin x$
- $f_4(x) = \sqrt{e^{2x} + 1}$

2 Soit $f(x) = x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ sur $\mathbb{R}$.

- Vérifier que $f(x) = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x + 1}$, puis calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- Montrer que f est impaire.
- Calculer $f'(x)$ et étudier les variations de f .

5 Primitive de $u' \cdot e^u$

Propriété

Si u est dérivable sur un intervalle I , alors les primitives de $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$ sur I sont :

$$x \mapsto e^{u(x)} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Exemple

« Primitive d'une forme $u'e^u$. »

Déterminer une primitive de $f(x) = (x^2 + 1)e^{x^3+3x}$ sur $\mathbb{R}$.

Solution. On pose $u(x) = x^3 + 3x$, donc $u'(x) = 3x^2 + 3 = 3(x^2 + 1)$. Donc $f(x) = \frac{1}{3}u'(x)e^{u(x)}$, et une primitive est :

$$F(x) = \frac{1}{3}e^{x^3+3x}.$$

Application

Déterminer une primitive de chaque fonction :

- $f_1(x) = 2e^{2x} - e^{-x}$
- $f_2(x) = e^{5x+4}$
- $f_3(x) = \frac{2x+1}{e^{x^2+x+1}}$
- $f_4(x) = xe^{-x^2}$

À faire à la maison

1 Déterminer une primitive de chaque fonction :

- $h_1(x) = (3x^2 - 2)e^{x^3-2x+1}$
- $h_2(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$

- $h_3(x) = e^x \cos(e^x)$
- $h_4(x) = xe^{-x^2/2}$

2 Soit $f(x) = (x+1)e^x$. Vérifier que $F(x) = xe^x$ est une primitive de f et en déduire toutes les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

6 Fonction exponentielle de base a

Définition

Soit $a > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$a^x = e^{x \ln a}.$$

La fonction $x \mapsto a^x$ est appelée *fonction exponentielle de base a* .

Conséquences

- $a^0 = 1$, $a^1 = a$.
- $1^x = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- Pour $a > 0$, $a \neq 1$: $\log_a$ et $x \mapsto a^x$ sont réciproques l'une de l'autre.

propriétés

Soient $a, b > 0$ et $x, y \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{Q}$.

- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
- $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$
- $(a^x)^r = a^{rx}$
- $a^x \cdot b^x = (ab)^x$
- $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$

6.1 Dérivée et variations

Propriété

Pour $a > 0$, $a \neq 1$, la fonction $x \mapsto a^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

- Si $a > 1$: $x \mapsto a^x$ est strictement croissante, $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$.
- Si $0 < a < 1$: $x \mapsto a^x$ est strictement décroissante, $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$.

Exemple

« Inéquation exponentielle. »

Résoudre $\left(\frac{1}{2}\right)^x \leq \frac{1}{4}$.

Solution. $\left(\frac{1}{2}\right)^x \leq \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$. Comme la fonction $x \mapsto (1/2)^x$ est strictement décroissante : $x \geq 2$. Donc $S = [2; +\infty[$.

Application

1 Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$\bullet 3^x > 9^x$$

$$\bullet 10^{2x} + 2 \cdot 10^x - 3 > 0$$

$$\bullet 2^{x^2} = 8$$

2 Calculer la dérivée de :

$$\bullet f(x) = 2^{x^2+2x+2}$$

$$\bullet g(x) = x^x \quad (\text{sur }]0; +\infty[, \text{ écrire } g(x) = e^{x \ln x})$$

À faire à la maison

1 Résoudre dans $\mathbb{R}$:

- $5^{2x} - 4 \cdot 5^x - 5 = 0$

- $7^x = 3$

- $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-1} > \frac{1}{4}$

- $3^{x+1} + 3^{x-1} = \frac{10}{9} \cdot 3^x$

2 Calculer la dérivée et étudier les variations de $f(x) = x \cdot 2^x$ sur $\mathbb{R}$.

3 **Croissance exponentielle.** Une population suit la loi $N(t) = N_0 \cdot 2^{t/T}$ où t est en heures et T est le temps de doublement. Si $N_0 = 1000$ et $T = 5$ h, calculer $N(15)$ et déterminer le temps nécessaire pour atteindre 50 000 individus.