

Table des matières

1	Notion de fonction numérique	2
2	Représentation graphique	2
3	Égalité de deux fonctions	3
4	Parité d'une fonction	4
5	Sens de variation et monotonie	5
5.1	Fonctions croissantes et décroissantes	5
5.2	Tableau de variation	5
6	Extremums	6
7	Comparaison de fonctions et position relative de courbes	6
8	Fonctions de référence	7
9	Fonctions quadratiques et homographiques	8
9.1	Fonction quadratique	8
9.2	Fonction homographique	8

1 Notion de fonction numérique

DÉFINITION 1

Soit D une partie de $\mathbb{R}$.

Une **fonction numérique** f de variable réelle, définie sur D , est une correspondance qui à tout réel $x \in D$ associe un *unique* réel noté $f(x)$.

On note : $f : D \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$.

- D est l'**ensemble de définition** de f , noté D_f .
- $f(x)$ est l'**image** de x par f .
- x est un **antécédent** de $f(x)$ par f .

EXEMPLE

Soit f définie par $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$.

1 Déterminer D_f .

2 Calculer l'image de 0.

3 Déterminer l'antécédent de 1.

REMARQUE

Recherche du domaine, règles usuelles :

- Un quotient $\frac{P(x)}{Q(x)}$ existe ssi $Q(x) \neq 0$.
- $\sqrt{P(x)}$ existe ssi $P(x) \geq 0$.
- $\frac{1}{\sqrt{P(x)}}$ existe ssi $P(x) > 0$.

EXERCICE

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$f(x) = \sqrt{x-2}, \quad g(x) = \frac{x+1}{x^2-4}, \quad h(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-6}}, \quad k(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x-1}.$$

2 Représentation graphique

DÉFINITION

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, la **courbe représentative** de f , notée $\mathcal{C}_f$, est l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que :

$$x \in D_f \quad \text{et} \quad y = f(x).$$

REMARQUE

Un point $M(x_0; y_0)$ appartient à $\mathcal{C}_f$ si et seulement si $x_0 \in D_f$ et $y_0 = f(x_0)$.

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3$. Les points $A(2; 1)$ et $B(-1; -1)$ appartiennent-ils à $\mathcal{C}_f$?

PROPRIÉTÉ 1

La courbe $\mathcal{C}_f$ permet de lire graphiquement :

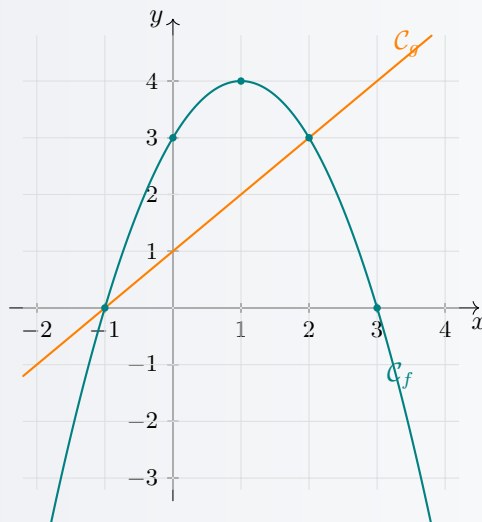
- l'image $f(a)$ comme l'ordonnée du point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a ;
- les antécédents de b comme les abscisses des intersections de $\mathcal{C}_f$ avec la droite $y = b$;
- les solutions de $f(x) = g(x)$ comme les abscisses des intersections de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$;
- les solutions de $f(x) \leq g(x)$ sur les intervalles où $\mathcal{C}_f$ est en dessous de $\mathcal{C}_g$.

EXEMPLE

La figure représente $f(x) = -(x-1)^2 + 4$ et $g(x) = x + 1$.

1 Lire $f(0)$ et les antécédents de 3 par f .

2 Résoudre graphiquement $f(x) = g(x)$ puis $f(x) \leq g(x)$.



EXERCICE

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 5$.

- 1 Déterminer le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 3.
- 2 Déterminer le point de $\mathcal{C}_f$ d'ordonnée -1 .
- 3 Le point $C(-2; -9)$ appartient-il à $\mathcal{C}_f$?

3 Égalité de deux fonctions

DÉFINITION 2

Deux fonctions f et g sont **égales**, et l'on écrit $f = g$, si et seulement si :

- $D_f = D_g$.
- $\forall x \in D_f, f(x) = g(x)$.

EXEMPLE

Soient $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ et $g(x) = x + 1$.

- 1 Déterminer D_f et D_g .
- 2 Comparer $f(x)$ et $g(x)$ sur leur domaine commun.
- 3 Les fonctions f et g sont-elles égales? Justifier.

EXERCICE

Soient f et g les fonctions définies par $f(x) = \sqrt{x^2}$ et $g(x) = x$.

- 1 Déterminer D_f et D_g . Que remarque-t-on?
- 2 Les fonctions f et g sont-elles égales? Justifier par une valeur de x .
- 3 Sur quel ensemble coïncident-elles?

4 Parité d'une fonction

DÉFINITION 3

Soit f une fonction de domaine D_f .

- f est **paire** si pour tout $x \in D_f$: $-x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$.
- f est **impaire** si pour tout $x \in D_f$: $-x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$.

La condition « $-x \in D_f$ » signifie que D_f est **symétrique par rapport à 0**.

PROPRIÉTÉ 2

Dans un repère orthonormé :

- Si f est *paire*, alors $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'**axe des ordonnées**.
- Si f est *impaire*, alors $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'**origine** O .

EXEMPLE

Étudier la parité des fonctions suivantes en justifiant chaque réponse.

- 1 $f(x) = x^2 + 1$.
- 2 $g(x) = x^3 - x$.
- 3 $h(x) = x^2 + x$.

EXERCICE

Étudier la parité des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, \quad g(x) = \frac{x}{x^2 - 1}, \quad h(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x, \quad k(x) = |x| + x^4.$$

5 Sens de variation et monotonie

5.1 Fonctions croissantes et décroissantes

DÉFINITION 4

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset D_f$.

- f est **croissante** sur I si pour tous $x_1, x_2 \in I$:

$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

- f est **décroissante** sur I si pour tous $x_1, x_2 \in I$:

$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

- f est **strictement croissante** (resp. *strictement décroissante*) si les inégalités sont strictes.
- f est **constante** sur I si $f(x_1) = f(x_2)$ pour tous $x_1, x_2 \in I$.
- f est **monotone** sur I si elle est croissante *ou* décroissante sur I .

PROPRIÉTÉ 3

Méthode du taux d'accroissement.

Soient $x_1, x_2 \in I$ avec $x_1 \neq x_2$. On pose :

$$T(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

- Si $T(x_1, x_2) > 0$ pour tous $x_1, x_2 \in I$ avec $x_1 \neq x_2$, alors f est strictement **croissante** sur I .
- Si $T(x_1, x_2) < 0$ pour tous $x_1, x_2 \in I$ avec $x_1 \neq x_2$, alors f est strictement **décroissante** sur I .

EXEMPLE

Étudier les variations de $f(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}$. Pour $x_1 \neq x_2$, calculer $T(x_1, x_2)$ puis étudier son signe sur $] -\infty; 0]$ et sur $[0; +\infty[$.

5.2 Tableau de variation

REMARQUE

On résume les variations d'une fonction dans un **tableau de variation**. À partir de l'étude précédente, dresser celui de $f(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}$ en indiquant les intervalles de monotonie et la valeur minimale.

EXERCICE

- 1 Soit $f(x) = 3x - 4$. Calculer le taux d'accroissement $T(x_1, x_2)$ de f , puis en déduire son sens de variation sur $\mathbb{R}$.
- 2 Soit $g(x) = -x^2$. Calculer le taux d'accroissement de g sur $[0; +\infty[$.
- 3 En déduire le sens de variation de g sur $[0; +\infty[$.

6 Extremums

DÉFINITION 5

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$.

- $f(x_0)$ est un **maximum** de f sur I si pour tout $x \in I : f(x) \leq f(x_0)$.
- $f(x_0)$ est un **minimum** de f sur I si pour tout $x \in I : f(x) \geq f(x_0)$.

On parle d'**extremum** pour désigner un maximum ou un minimum.

EXEMPLE

Soit $f(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}$. Déterminer son extremum, préciser où il est atteint et justifier la réponse par une inégalité.

EXERCICE

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 6x - 5$.

- 1 Vérifier que $f(x) = -(x - 3)^2 + 4$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- 2 En déduire que f admet un maximum sur $\mathbb{R}$.
- 3 Préciser ce maximum et la valeur de x en laquelle il est atteint.

7 Comparaison de fonctions et position relative de courbes

DÉFINITION

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I .

- $f \leq g$ sur I si pour tout $x \in I : f(x) \leq g(x)$.
- $f < g$ sur I si pour tout $x \in I : f(x) < g(x)$.

PROPRIÉTÉ

Soient $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives respectives de f et g sur I .

- Si $f \leq g$ sur I , alors $\mathcal{C}_f$ est **en dessous** de $\mathcal{C}_g$ sur I .
- Si $f = g$ en x_0 , les courbes se **coupent** au point d'abscisse x_0 .

REMARQUE

Méthode : pour étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, on étudie le signe de $f(x) - g(x)$ sur I .

EXEMPLE

Comparer $f(x) = x^2$ et $g(x) = x$ sur $\mathbb{R}$.

- 1 Factoriser $f(x) - g(x)$ puis étudier son signe.
- 2 Préciser la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
- 3 Déterminer les points d'intersection des deux courbes.

EXERCICE

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = 2x - 1$.

- 1 Étudier le signe de $f(x) - g(x)$.
- 2 En déduire la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
- 3 Préciser leur point commun.

8 Fonctions de référence

PROPRIÉTÉ 4

Variations des fonctions usuelles :

- $f(x) = ax + b$ (affine, $a \neq 0$) : strictement croissante sur $\mathbb{R}$ si $a > 0$, strictement décroissante si $a < 0$.
- $f(x) = ax^2$, avec $a \neq 0$: paire, de courbe une parabole de sommet O . Si $a > 0$, elle décroît puis croît ; si $a < 0$, elle croît puis décroît.
- $f(x) = x^3$: strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Fonction impaire.
- $f(x) = \frac{a}{x}$, avec $a \neq 0$: impaire, de courbe une hyperbole de centre O . Elle est décroissante sur chacun des deux intervalles de définition si $a > 0$, et croissante si $a < 0$.
- $f(x) = \sqrt{x}$: strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
- $f(x) = |x|$: décroissante sur $] -\infty; 0]$, croissante sur $[0; +\infty[$. Fonction paire.
- $f(x) = \cos x$ est paire et $g(x) = \sin x$ est impaire. Elles sont périodiques de période 2π et prennent leurs valeurs dans $[-1, 1]$.

EXEMPLE

Donner le sens de variation de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle indiqué :

- $f(x) = -3x + 2$ sur $\mathbb{R}$;
- $h(x) = \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$;
- $g(x) = x^2$ sur $[0; +\infty[$;
- $k(x) = \sqrt{x}$ sur $[0; +\infty[$.

EXERCICE

- 1 Étudier les variations de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$ en utilisant le taux d'accroissement.
- 2 En déduire les variations sur $] -\infty; 0[$ en utilisant l'imparité.

EXERCICE

Soit $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

- 1 Vérifier que $f(x) = (x - 2)^2 - 1$.
- 2 En déduire le sens de variation de f sur $] -\infty; 2]$ et sur $[2; +\infty[$.
- 3 Donner le tableau de variation de f .
- 4 Préciser le minimum de f .

9 Fonctions quadratiques et homographiques

9.1 Fonction quadratique

DÉFINITION 6

Une fonction quadratique est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

où a, b et c sont des réels et $a \neq 0$. En posant

$$\alpha = -\frac{b}{2a}, \quad \beta = f(\alpha),$$

on obtient la forme canonique

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta.$$

PROPRIÉTÉ 5

La courbe d'une fonction quadratique est une parabole de sommet $S(\alpha; \beta)$ et d'axe de symétrie $x = \alpha$.

- Si $a > 0$, f est décroissante sur $] -\infty; \alpha]$, croissante sur $[\alpha; +\infty[$ et admet le minimum β .
- Si $a < 0$, f est croissante sur $] -\infty; \alpha]$, décroissante sur $[\alpha; +\infty[$ et admet le maximum β .

Pour tracer la parabole, on place le sommet, l'axe de symétrie et plusieurs couples de points symétriques.

EXEMPLE

Soit $f(x) = -2x^2 + 4x + 1$.

- 1 Écrire f sous forme canonique.
- 2 Déterminer le sommet, l'axe de symétrie et l'extremum de sa courbe.

EXERCICE

Soit $f(x) = 2x^2 - 8x + 5$.

- 1 Écrire f sous forme canonique.
- 2 Déterminer son sommet, son axe de symétrie et son minimum.
- 3 Dresser son tableau de variations et construire sa courbe à l'aide de cinq points.

9.2 Fonction homographique

DÉFINITION 7

Une fonction homographique est une fonction de la forme $h(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$, où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$. Son domaine est $D_h = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$. Elle peut s'écrire sous la forme réduite

$$h(x) = q + \frac{\lambda}{x - r}, \quad q = \frac{a}{c}, \quad r = -\frac{d}{c}, \quad \lambda = \frac{bc - ad}{c^2}.$$

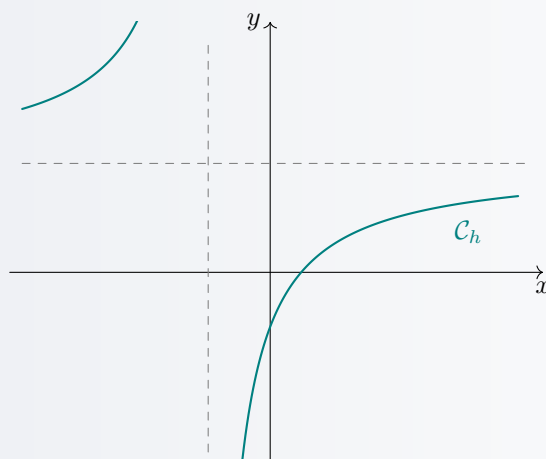
PROPRIÉTÉ 6

La courbe de $h(x) = q + \frac{\lambda}{x-r}$ est une hyperbole de centre $\Omega(r; q)$ et d'asymptotes $x = r$ et $y = q$. Sur chacun des intervalles $] -\infty; r[$ et $]r; +\infty[$, la fonction est décroissante si $\lambda > 0$ et croissante si $\lambda < 0$. Pour la tracer sans changement de repère, on trace les asymptotes, on place le centre puis plusieurs points de chaque branche.

EXEMPLE

La figure représente la fonction $h(x) = \frac{2x-1}{x+1}$.

- 1 Lire les asymptotes et le centre de la courbe.
- 2 Déterminer graphiquement les variations de h .
- 3 Écrire h sous forme réduite et retrouver ces résultats.



EXERCICE

Soit $h(x) = \frac{3x+1}{x-2}$.

- 1 Déterminer D_h et écrire h sous forme réduite.
- 2 Déterminer le centre et les asymptotes de sa courbe.
- 3 Étudier ses variations et construire sa courbe sans changement de repère.

À retenir

PROPRIÉTÉ

L'étude d'une fonction commence par son domaine, puis mobilise les images, les antécédents, la parité, les variations et les extremums. Le graphique permet de résoudre des équations et des inéquations et de comparer deux fonctions. Une fonction quadratique se trace à partir de son sommet et de son axe de symétrie ; une fonction homographique se trace à partir de sa forme réduite, de son centre, de ses asymptotes et de quelques points.