

Série d'exercices — Généralités sur les fonctions

1^{ère} BAC SX BIOF

En. Nidal SABI

Exercice 1

Étudier la parité de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 3x^2 - 5$ sur $\mathbb{R}$.

2. $g(x) = x^3 + 2x$ sur $\mathbb{R}$.

3. $h(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

4. $k(x) = \sqrt{x^2 + 1} + |x|$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2}$.

1. Montrer que f est minorée par $\frac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que f est majorée par 1 sur $\mathbb{R}$.

3. Préciser les valeurs de x pour lesquelles ces bornes sont atteintes.

Exercice 3

Soit f la fonction définie par $f(x) = x + \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.

1. Calculer $f(1)$ et $f(-1)$.

2. Montrer que pour tout $x > 0$, $f(x) \geq 2$. Préciser la valeur de x pour laquelle l'égalité a lieu.

3. Montrer que pour tout $x < 0$, $f(x) \leq -2$.

Exercice 4

Étudier la périodicité des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$:

1. $f(x) = \sin^2 x$.

2. $g(x) = \cos(3x) + \sin(3x)$.

3. $h(x) = |\sin x|$.

4. $k(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$.

Exercice 5

On considère les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 5$ et $g(x) = 2x - 3$.

1. Étudier le signe de $f(x) - g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

2. En déduire la position relative des courbes (C_f) et (C_g) .

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4x - 3$.

1. Dresser le tableau de variations de f .

2. Déterminer $f([0; 3])$, $f([1; 4])$ et $f([-1; 5])$.

Exercice 7

Étudier la monotonie sur $[0; +\infty[$ de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \sqrt{x+2}$.

3. $h(x) = x^2 + 3x$.

2. $g(x) = \frac{2}{x+1}$.

4. $k(x) = \frac{x}{x+1}$.

Exercice 8

Soient $f(x) = 2x - 1$ et $g(x) = x^2 + 1$ deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer $(g \circ f)(x)$ et $(f \circ g)(x)$.
2. Comparer $g \circ f$ et $f \circ g$.

Exercice 9

Soit h la fonction définie sur $[-1; +\infty[$ par $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$.

1. Écrire h comme composée de deux fonctions f et g à préciser.
2. Étudier la monotonie de h sur $[-1; +\infty[$.

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)^3 + 2$.

1. Tracer la courbe (C_f) dans un repère orthonormé.
2. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq 2$.

Exercice 11

On considère $f(x) = \sqrt{x+3}$ et $g(x) = -x + 2$.

1. Déterminer D_f et D_g .
2. Tracer (C_f) et (C_g) dans un même repère orthonormé.
3. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$ sur $[-3; +\infty[$.

Exercice 12

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^* \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{x+1}{x(x-1)}$.

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \frac{1}{x}$. Vérifier que f peut s'écrire $f(x) = -g(x) + 2g(x-1) - g(x-1) + g(x)$. (*Indication : décomposer en éléments simples.*)
2. Justifier brièvement, à partir de la décomposition, le comportement de f aux valeurs $x = 0$ et $x = 1$.