

Série d'exercices N°3

Généralités sur les Fonctions

1^{ère} Année Baccalauréat – Sciences Mathématiques

Consignes. Justifier toutes les variations par taux d'accroissement ou par théorème de composition. Pour chaque domaine, expliciter les conditions d'existence.

Couverture. 14 exercices : domaine, parité/périodicité, variations, extrémums, comparaison, lecture graphique.

I. Ensemble de définition et égalité

Exercice 1 *Ensembles de définition*

Déterminer le domaine $\mathcal{D}_f$ de chacune des fonctions :

1. $f_1(x) = \frac{x+3}{x^2-9}$.

2. $f_2(x) = \sqrt{6-x-x^2}$.

3. $f_3(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x^2-1}$.

4. $f_4(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$.

5. $f_5(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-5x+6}}$.

6. $f_6(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$.

Exercice 2 *Égalité de fonctions*

Préciser si les couples suivants définissent des fonctions égales (justifier).

1. $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ et $g(x) = x+3$.

2. $f(x) = \sqrt{x^2}$ et $g(x) = x$.

3. $f(x) = \sqrt{x^2}$ et $g(x) = |x|$.

4. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ et $g(x) = 1$.

II. Parité et périodicité

Exercice 3 *Parité*

Étudier la parité de chacune des fonctions suivantes (après vérification que le domaine est symétrique par rapport à 0).

1. $f_1(x) = x^4 + 5x^2 - 7$.

2. $f_2(x) = \frac{x^3-x}{x^2+1}$.

3. $f_3(x) = x\sqrt{4-x^2}$ sur $[-2, 2]$.

4. $f_4(x) = |x + 1| - |x - 1|$.
5. $f_5(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$.
6. $f_6(x) = \cos(x) + x \sin(x)$.

Exercice 4 *Périodicité*

1. Montrer que $f(x) = \sin(3x) + \cos(2x)$ est périodique de période 2π .
2. Soit $g(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)$. Déterminer la période principale de g .
3. Soit $h(x) = \sin^2(x)$. Montrer que h est périodique de période π .
4. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x + 2) = f(x)$ et $f(x) = x$ sur $[0, 2[$. Donner les valeurs de f aux points $-1, 3, 4, 5$.

III. Variations et extrémums**Exercice 5** *Variations par taux*

Étudier les variations sur l'intervalle indiqué, en utilisant le taux d'accroissement.

1. $f(x) = x^2 - 4x + 5$ sur $\mathbb{R}$.
2. $g(x) = \frac{1}{x - 2}$ sur $] -\infty, 2[$, puis sur $]2, +\infty[$.
3. $h(x) = \frac{x}{x + 1}$ sur $] -1, +\infty[$.
4. $k(x) = \sqrt{x + 1} - \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$ (utiliser la quantité conjuguée).

Exercice 6 *Variations par décomposition*

Étudier les variations de chacune des fonctions suivantes en l'écrivant comme composée $g \circ f$:

1. $\varphi_1(x) = \sqrt{4 - x^2}$ sur $[-2, 2]$.
2. $\varphi_2(x) = (x^2 - 4x + 3)^3$ sur $\mathbb{R}$.
3. $\varphi_3(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ sur $\mathbb{R}$.
4. $\varphi_4(x) = (3 - x)^2$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7 *Extrémums*

1. Soit $f(x) = -2x^2 + 8x - 3$. Mettre sous forme canonique et déterminer le maximum.
2. Soit $g(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 5}$. Déterminer le maximum sur $\mathbb{R}$.
3. Soit $h(x) = x + \frac{4}{x}$ sur $]0, +\infty[$. Étudier les variations et trouver le minimum.
4. Soit $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 13}$. Déterminer le minimum sur $\mathbb{R}$.

IV. Comparaison et lecture graphique

Exercice 8 *Comparaison de fonctions*

1. Comparer sur $\mathbb{R}_+$ les fonctions $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^3$.
2. Comparer sur $[0, +\infty[$ les fonctions $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = \frac{x+1}{2}$ (*indication* : étudier $g - f$).
3. Soit $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ et $g(x) = x - 1$ sur $] -1, +\infty[$. Montrer que $f(x) \geq g(x) + \frac{1}{x+1}$.

Exercice 9 *Lecture graphique*

Soit f une fonction définie sur $[-3, 5]$ dont on connaît le tableau de variations :

x	-3	-1	2	5
f	-2 ↗	4 ↘	-3 ↗	1

1. Déterminer l'image de $[-3, 5]$ par f .
2. Discuter le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$ selon les valeurs de k .
3. Donner le nombre de solutions de $f(x) = 0$.
4. Quelles sont les variations de $h(x) = f(x) + 2$ et $\ell(x) = -3f(x)$?

V. Problèmes de synthèse

Exercice 10 *Étude complète*

Soit f définie par $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x - 1}$.

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$.
2. Montrer que $f(x) = x - 1 - \frac{1}{x - 1}$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$.
3. Étudier les variations de f sur $] -\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.
4. Montrer que le centre de symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$ est le point $\Omega(1, 0)$.
5. Dresser le tableau de variations complet.

Exercice 11 *Synthèse parité + composition*

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

1. Montrer que f est impaire.
2. Étudier les variations de f sur $[0, +\infty[$, puis sur $\mathbb{R}$ par parité.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 < f(x) < 1$.
4. L'application $f : \mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[$ est-elle bijective ? (*Indication* : exprimer x en fonction de $y = f(x)$.)