

Généralités sur les Fonctions

1^{ère} Année Baccalauréat – Sciences Mathématiques

Volume horaire officiel : 11h (cf. répartition 2013) – **Pré-requis** : fonctions du tronc commun (notion, courbe), ordre dans $\mathbb{R}$, valeur absolue.

Capacités attendues : comparer deux expressions par diverses techniques ; déduire les variations, extrémums ou signe d'une fonction à partir d'une courbe ou d'un tableau ; déterminer les variations de $f + \lambda$, λf , $g \circ f$ à partir de celles de f et g ; discuter les solutions d'une équation par lecture graphique ; étudier équations et inéquations à l'aide de fonctions.

Table des matières

1	Notion de fonction numérique	2
1.1	Définition	2
1.2	Détermination de l'ensemble de définition	2
1.3	Égalité de deux fonctions	2
2	Parité et périodicité	3
2.1	Parité	3
2.2	Périodicité	3
3	Sens de variation, monotonie	5
3.1	Définitions	5
3.2	Étude par taux de variation	5
3.3	Tableau de variations	5
3.4	Variations de $f + \lambda$ et de λf	6
3.5	Variations de la composée $g \circ f$	6
4	Extremums	7
5	Comparaison de fonctions et résolution graphique	8
5.1	Comparaison de deux fonctions	8
5.2	Résolution graphique	8
6	Synthèse	9
6.1	Schéma d'étude d'une fonction	9
6.2	Récapitulatif des variations sous opérations	9
6.3	Pièges classiques	9

1. Notion de fonction numérique

1.1 Définition

Définition

Définition 1.1 — Une **fonction numérique** (de variable réelle) est une application $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, où D est une partie de $\mathbb{R}$ appelée **ensemble de définition** (ou **domaine**), notée $\mathcal{D}_f$.

L'image d'un réel $x \in \mathcal{D}_f$ se note $f(x)$. Le **nombre** $f(x)$ s'appelle l'**image** de x par f .

La **courbe représentative** de f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan est l'ensemble des points :

$$\mathcal{C}_f = \{ M(x, f(x)) \mid x \in \mathcal{D}_f \}.$$

1.2 Détermination de l'ensemble de définition

Méthode

$\mathcal{D}_f$ est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels $f(x)$ est calculable. En pratique :

- Une fraction $\frac{u(x)}{v(x)}$ exige $v(x) \neq 0$.
- Une racine carrée $\sqrt{u(x)}$ exige $u(x) \geq 0$.
- Un logarithme (hors-programme TC, à venir) exige $u(x) > 0$.

$\mathcal{D}_f$ est l'intersection des conditions de toutes les expressions intervenant dans $f(x)$.

Exemple

Exemple 1.1 — Déterminer $\mathcal{D}_f$ pour chacune des fonctions :

(a) $f(x) = \frac{2x+1}{x^2-4}$: on exige $x^2 - 4 \neq 0$, soit $x \neq \pm 2$. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

(b) $g(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$: on exige $x^2 - 3x + 2 \geq 0$, soit $(x-1)(x-2) \geq 0$, soit $x \leq 1$ ou $x \geq 2$.
Donc $\mathcal{D}_g =]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$.

(c) $h(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x-3}$: on exige $x-1 \geq 0$ et $x-3 \neq 0$. Donc $\mathcal{D}_h = [1, 3[\cup]3, +\infty[$.

1.3 Égalité de deux fonctions

Définition

Définition 1.2 — Deux fonctions f et g sont **égales**, et on écrit $f = g$, si elles ont le *même ensemble de définition* et coïncident en chaque point :

$$f = g \Leftrightarrow \mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g \text{ et } (\forall x \in \mathcal{D}_f) f(x) = g(x).$$

Exemple

Exemple 1.2 — Les fonctions $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ et $g(x) = x+1$ sont *distinctes* bien qu'elles aient la même expression simplifiée : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ alors que $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$.

2. Parité et périodicité

2.1 Parité

Définition

Définition 2.1 — Soit f une fonction de domaine $\mathcal{D}_f$ **symétrique** par rapport à 0 (c'est-à-dire : $\forall x \in \mathcal{D}_f, -x \in \mathcal{D}_f$).

- f est **paire** si $(\forall x \in \mathcal{D}_f) f(-x) = f(x)$. La courbe est alors *symétrique par rapport à l'axe des ordonnées*.
- f est **impaire** si $(\forall x \in \mathcal{D}_f) f(-x) = -f(x)$. La courbe est alors *symétrique par rapport à l'origine*.

Exemple

Exemple 2.1 —

- $f(x) = x^2$ est paire : $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.
- $g(x) = x^3$ est impaire : $g(-x) = -x^3 = -g(x)$.
- $h(x) = x^2 + x$ n'est ni paire ni impaire : $h(-1) = 0$ et $h(1) = 2$, donc $h(-x) \neq h(x)$ et $h(-x) \neq -h(x)$.
- $k(x) = |x|$ est paire ; $\ell(x) = \frac{1}{x}$ est impaire (sur $\mathbb{R}^*$).

Méthode

Pour étudier la parité d'une fonction f :

1. Vérifier que $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à 0.
2. Calculer $f(-x)$.
3. Comparer avec $f(x)$ et $-f(x)$.

Si f est paire (ou impaire), on peut limiter l'étude à $\mathcal{D}_f \cap [0, +\infty[$, puis compléter par symétrie.

2.2 Périodicité

Définition

Définition 2.2 — Une fonction f est **périodique** de période $T > 0$ si :

- (1) $(\forall x \in \mathcal{D}_f) x + T \in \mathcal{D}_f$ et $x - T \in \mathcal{D}_f$;
- (2) $(\forall x \in \mathcal{D}_f) f(x + T) = f(x)$.

La plus petite période strictement positive (lorsqu'elle existe) s'appelle la **période principale** de f .

Exemple

Exemple 2.2 — La fonction $f(x) = \sin(x)$ est périodique de période 2π ; la fonction $g(x) = \tan(x)$ est périodique de période π .

La fonction $h(x) = \cos(\omega x)$ (avec $\omega > 0$) est périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Remarque

Si f est périodique de période T , alors elle est kT -périodique pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Plus généralement, $f(x + kT) = f(x)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. L'étude peut donc se restreindre à un intervalle de longueur T , puis se compléter par translations horizontales successives.

Application

1. Étudier la parité de :

(a) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$.

(b) $g(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$.

(c) $h(x) = x\sqrt{1 + x^2}$.

2. Soit $f(x) = \sin(2x) + \cos(x)$. Montrer que f est 2π -périodique. Est-ce la période principale ?

3. Sens de variation, monotonie

3.1 Définitions

Définition

Définition 3.1 — Soit f définie sur un intervalle $I \subset \mathcal{D}_f$.

- f est **croissante** sur I si $(\forall x_1, x_2 \in I) x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.
- f est **strictement croissante** sur I si $(\forall x_1, x_2 \in I) x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- f est **décroissante** (resp. **strictement décroissante**) sur I si les inégalités sont inversées.
- f est **constante** sur I si $(\forall x_1, x_2 \in I) f(x_1) = f(x_2)$.
- f est **monotone** (resp. **strictement monotone**) si elle est croissante ou décroissante (resp. strictement).

3.2 Étude par taux de variation

Définition

Définition 3.2 — Soit f définie sur I et $x_1 \neq x_2$ dans I . Le **taux de variation** (ou **taux d'accroissement**) de f entre x_1 et x_2 est :

$$\tau(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Propriété

Propriété 3.1 — Soit f définie sur un intervalle I .

- f croissante sur $I \Leftrightarrow \tau(x_1, x_2) \geq 0$ pour tous $x_1 \neq x_2 \in I$.
- f décroissante sur $I \Leftrightarrow \tau(x_1, x_2) \leq 0$ pour tous $x_1 \neq x_2 \in I$.
- Idem avec inégalités strictes pour la monotonie stricte.

Exemple

Exemple 3.1 — Étudier les variations de $f(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}$.

Solution. Pour $x_1 \neq x_2$, $\tau(x_1, x_2) = \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1} = x_1 + x_2$.

- Si $x_1, x_2 \in]-\infty, 0] : x_1 + x_2 \leq 0$, donc f est décroissante sur $] -\infty, 0]$ (strictement si $x_1, x_2 < 0$).
- Si $x_1, x_2 \in [0, +\infty[: x_1 + x_2 \geq 0$, donc f est croissante sur $[0, +\infty[$.

3.3 Tableau de variations

Remarque

On synthétise les variations d'une fonction dans un **tableau de variations** :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$ min en 0	$\nearrow$

Pour $f(x) = x^2$, le minimum est 0 atteint en $x = 0$.

3.4 Variations de $f + \lambda$ et de λf

Propriété

Propriété 3.2 — Soit f définie sur I et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

- $f + \lambda$ (la fonction $x \mapsto f(x) + \lambda$) a les *mêmes variations* que f .
- λf (la fonction $x \mapsto \lambda f(x)$) a les mêmes variations que f si $\lambda > 0$, et les *variations contraires* si $\lambda < 0$.

Démonstration

Cas λf avec $\lambda < 0$. Soient $x_1 < x_2$ dans I , f croissante. Alors $f(x_1) \leq f(x_2)$; en multipliant par $\lambda < 0$, l'inégalité s'inverse : $\lambda f(x_1) \geq \lambda f(x_2)$. Donc λf est décroissante. $\square$

3.5 Variations de la composée $g \circ f$

Théorème

Théorème 3.1 — Soient $f : I \rightarrow J$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions (où $J \supset f(I)$).

- Si f et g ont *même* sens de variation, alors $g \circ f$ est **croissante** sur I .
- Si f et g ont *sens contraires*, alors $g \circ f$ est **décroissante** sur I .

Démonstration

Supposons par exemple f croissante sur I et g croissante sur J . Soient $x_1 < x_2$ dans I ; alors $f(x_1) \leq f(x_2)$, et comme $f(x_1), f(x_2) \in J$ et g croissante : $g(f(x_1)) \leq g(f(x_2))$. Donc $g \circ f$ est croissante. Les autres cas sont symétriques. $\square$

Exemple

Exemple 3.2 — Étudier les variations de $\varphi(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ sur $\mathbb{R}$.

Solution. On pose $\varphi = g \circ f$ avec $f(x) = x^2 + 1$ et $g(t) = \sqrt{t}$.

- f décroissante sur $] -\infty, 0]$, croissante sur $[0, +\infty[$.
- g croissante sur $[0, +\infty[$ (et $f(\mathbb{R}) \subset [1, +\infty[\subset [0, +\infty[$).

Donc φ est décroissante sur $] -\infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$. Minimum : $\varphi(0) = 1$.

4. Extremums

Définition

Définition 4.1 — Soit f définie sur $\mathcal{D}_f$ et $x_0 \in \mathcal{D}_f$.

- $f(x_0)$ est le **maximum** (absolu) de f sur $\mathcal{D}_f$ si $(\forall x \in \mathcal{D}_f) f(x) \leq f(x_0)$.
- $f(x_0)$ est le **minimum** (absolu) de f sur $\mathcal{D}_f$ si $(\forall x \in \mathcal{D}_f) f(x) \geq f(x_0)$.
- Si l'inégalité n'est vraie qu'*au voisinage* de x_0 , on parle de **maximum (ou minimum) local**.

Propriété

Propriété 4.1 — Une fonction *strictement monotone* sur un intervalle I atteint ses extrémums (s'ils existent) aux *bornes* de I .

Exemple

Exemple 4.1 — La fonction $f(x) = -x^2 + 4x + 1$ s'écrit $f(x) = -(x - 2)^2 + 5$. Donc $f(x) \leq 5$ pour tout x , avec égalité en $x = 2$. Maximum absolu : 5, atteint en $x = 2$. Pas de minimum (la fonction tend vers $-\infty$ en $\pm\infty$).

Application

1. Étudier les variations et les extrémums de :

(a) $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$ sur $\mathbb{R}$.

(b) $g(x) = \frac{1}{x-2}$ sur $] -\infty, 2[$ et sur $]2, +\infty[$.

(c) $h(x) = \sqrt{4 - x^2}$ sur $[-2, 2]$.

2. Déterminer les variations de $\varphi(x) = (3x - 1)^2 + 2$ en décomposant $\varphi = g \circ f$.

5. Comparaison de fonctions et résolution graphique

5.1 Comparaison de deux fonctions

Définition

Définition 5.1 — Soient f et g définies sur un intervalle I . On dit que $f \leq g$ **sur** I si $(\forall x \in I) f(x) \leq g(x)$.

Graphiquement, $f \leq g$ sur I signifie que $\mathcal{C}_f$ est *en-dessous* de $\mathcal{C}_g$ sur l'intervalle.

Méthode

Pour comparer f et g sur un intervalle I , on étudie le **signe** de la différence $f(x) - g(x)$ par les techniques suivantes :

- Factorisation : $(x - a)(x - b)$, identités remarquables...
- Tableau de signe.
- Quantité conjuguée pour les racines : $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$.
- Étude des variations de $h = f - g$.

Exemple

Exemple 5.1 — Comparer $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}$.

Solution. $f(x) - g(x) = x - x^2 = x(1 - x)$. Tableau de signe :

- $x < 0$: $x < 0$ et $1 - x > 0$, donc $f - g < 0$, soit $f < g$.
- $0 < x < 1$: $x > 0$ et $1 - x > 0$, donc $f - g > 0$, soit $f > g$.
- $x > 1$: $x > 0$ et $1 - x < 0$, donc $f - g < 0$, soit $f < g$.

Avec égalité en $x = 0$ et $x = 1$.

5.2 Résolution graphique

Remarque

Résolution graphique de l'équation $f(x) = k$: les solutions sont les *abscisses* des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec la droite horizontale d'équation $y = k$.

Résolution graphique de l'inéquation $f(x) \leq k$: c'est l'ensemble des x pour lesquels $\mathcal{C}_f$ est *sous* (ou *sur*) la droite $y = k$.

Résolution graphique de $f(x) = g(x)$: abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

Application

1. Comparer sur $\mathbb{R}_+$ les fonctions $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = x$.
2. Soient $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = 2x$. Résoudre $f(x) \geq g(x)$ par tableau de signe.

6. Synthèse

6.1 Schéma d'étude d'une fonction

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$.
2. Étudier la **parité** et la **périodicité** (pour restreindre le domaine d'étude).
3. Étudier les **variations** (par taux ou décomposition $g \circ f$).
4. Déterminer les **extrémums** et les **points particuliers** (intersections avec les axes).
5. Dresser le **tableau de variations**.
6. Tracer la **courbe** $\mathcal{C}_f$.

6.2 Récapitulatif des variations sous opérations

Opération	Conserve le sens	Inverse le sens
$f + \lambda$	toujours	jamais
λf	si $\lambda > 0$	si $\lambda < 0$
$g \circ f$	si f et g mêmes sens	si f et g sens contraires

6.3 Pièges classiques

Remarque

1. **Confondre période et autre caractéristique.** Une fonction périodique vérifie $f(x + T) = f(x)$ pour *tous* les x , pas seulement quelques-uns.
2. **Composer sans vérifier les domaines.** Pour $g \circ f$, il faut s'assurer que $f(I) \subset \mathcal{D}_g$ avant d'appliquer le théorème.
3. **Confondre maximum et extremum local.** Un point peut être un maximum local sans être maximum absolu.
4. **Conclure trop vite par taux de variation.** Le signe du taux doit valoir pour *toutes* les paires x_1, x_2 de l'intervalle, pas pour une seule.
5. **Inverser sens dans λf .** Pour $\lambda < 0$, il faut bien inverser le sens, pas le conserver.