

Table des matières

1	Parité d'une fonction	2
2	Fonctions majorées, minorées, bornées et extremums	2
3	Fonctions périodiques	3
4	Comparaison de deux fonctions	4
5	Image d'un intervalle par une fonction numérique	4
6	Monotonie d'une fonction numérique	5
7	Composée de deux fonctions numériques	6
8	Représentations graphiques de $x \mapsto ax^3$ et $x \mapsto \sqrt{x+a}$	7

1 Parité d'une fonction

Définition

Soit f une fonction numérique définie sur un ensemble $D \subseteq \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in D, -x \in D$.

- f est dite **paire** sur D si $(\forall x \in D) : f(-x) = f(x)$.
- f est dite **impaire** sur D si $(\forall x \in D) : f(-x) = -f(x)$.

L'interprétation graphique (axe et centre de symétrie) sera étudiée au chapitre 11.

Exemple

Étudier la parité de chacune des fonctions suivantes :

1 $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$ sur $\mathbb{R}$.

2 $g(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ sur $\mathbb{R}$.

3 $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ sur $\mathbb{R}$.

4 $k(x) = x + \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.

Application

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x|x| + 2x^3$.

- 1** Vérifier que $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0.
- 2** Étudier la parité de f .

2 Fonctions majorées, minorées, bornées et extremums

Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$. On a les définitions suivantes.

- f est **majorée** sur I s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $(\forall x \in I) : f(x) \leq M$.
- f est **minorée** sur I s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $(\forall x \in I) : m \leq f(x)$.
- f est **bornée** sur I si elle est à la fois majorée et minorée sur I .
- $f(a)$ est le **maximum** de f sur I si $(\forall x \in I) : f(x) \leq f(a)$.
- $f(a)$ est le **minimum** de f sur I si $(\forall x \in I) : f(x) \geq f(a)$.
- $f(a)$ est un **extremum** de f sur I s'il en est le maximum ou le minimum.

Interprétation graphique.

Si f est majorée par M sur I , (C_f) est au-dessous de la droite $y = M$ sur I .

Si f est minorée par m sur I , (C_f) est au-dessus de la droite $y = m$ sur I .

Exemple

On considère les fonctions :

- $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$;
- $g(x) = x^2 - 4x + 1$ sur $\mathbb{R}$.

- 1 Montrer que f est majorée par 1 sur $]0; +\infty[$ et minorée par 1 sur $] -\infty; 0[$.
- 2 La fonction f est-elle bornée sur $\mathbb{R}^*$? Justifier.
- 3 Calculer $g(2)$ et montrer que -3 est le minimum de g sur $\mathbb{R}$.
- 4 Que peut-on en déduire pour la position de la courbe (C_g) par rapport à la droite $y = -3$?

Application

On considère les fonctions définies par $f(x) = 3 - \sqrt{1 - 2x}$ et $g(x) = x + \frac{4}{x}$.

- 1 Déterminer D_f et D_g .
- 2 Montrer que f est majorée par 3 sur D_f .
- 3 Montrer que g est minorée par 4 sur $]0; +\infty[$ et majorée par -4 sur $] -\infty; 0[$.

3 Fonctions périodiques

Définition

Soit f une fonction définie sur D et T un nombre réel strictement positif. On dit que f est **périodique de période T** (ou T -périodique) sur D si :

- $\forall x \in D, x + T \in D$;
- $\forall x \in D, f(x + T) = f(x)$.

Périodes des fonctions de référence : sin et cos sont 2π -périodiques ; tan est π -périodique.

Exemple

On considère les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

- $f(x) = \cos^2(x)$;
- $g(x) = \sin(2\pi x)$.

- 1 Montrer que f est π -périodique sur $\mathbb{R}$.
- 2 Montrer que g est 1-périodique sur $\mathbb{R}$.

Application

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi x}{3}\right)$.

- 1 Déterminer un réel $T > 0$ tel que $f(x + T) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- 2 En déduire que f est périodique sur $\mathbb{R}$.

4 Comparaison de deux fonctions

Définition

Soient f et g deux fonctions définies sur le même ensemble D .

- f et g sont **égales** sur D si $(\forall x \in D) : f(x) = g(x)$.
- f est **supérieure ou égale** à g sur D , noté $f \geq g$, si $(\forall x \in D) : f(x) \geq g(x)$.

Interprétation graphique.

Si $f > g$ sur D , alors (C_f) est strictement au-dessus de (C_g) sur D .

Si $f \leq g$ sur D , alors (C_f) est au-dessous de (C_g) sur D .

Exemple

On considère les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

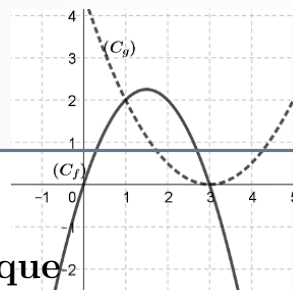
- $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x^2 + 2}$ et $g(x) = x + 1$;
- $u(x) = x^2 - 2x + 1$ et $v(x) = -2x^2 + 4x + 1$.

- 1 Comparer f et g sur $\mathbb{R}$.
- 2 Étudier le signe de $u(x) - v(x)$ sur $\mathbb{R}$.
- 3 En déduire la comparaison entre u et v sur $\mathbb{R}$.

Application

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par leurs courbes ci-dessous.

- 1 Résoudre graphiquement les équations : $f(x) = 2$, $f(x) = 0$, $f(x) = g(x)$.
- 2 Résoudre graphiquement les inéquations : $f(x) < 2$, $g(x) \geq 0$, $f(x) > g(x)$.



5 Image d'un intervalle par une fonction numérique

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . L'**image de l'intervalle** I par f est l'ensemble :

$$f(I) = \{f(x) / x \in I\}.$$

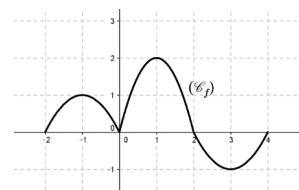
Technique de détermination sur $[a; b]$:

- Si f est croissante sur $[a; b]$: $f([a; b]) = [f(a); f(b)]$.
- Si f est décroissante sur $[a; b]$: $f([a; b]) = [f(b); f(a)]$.
- Si f change de monotonie sur $[a; b]$: $f([a; b]) = [m; M]$ où m et M sont respectivement le minimum et le maximum de f sur $[a; b]$.

Exemple

La figure ci-contre représente la courbe d'une fonction f définie sur $[-2; 4]$. Lire sur la figure et déterminer les images suivantes :

- $f([-2; -1])$
- $f([-1; 1])$
- $f([0; 1])$
- $f([1; 3])$
- $f([1; 4])$
- $f([0; 3])$
- $f(]-1; 1])$
- $f(]-2; 4])$



Application

Soit f une fonction dont le tableau de variations est donné ci-contre. Déterminer chacune des images suivantes :

- $f([-4; 0])$
- $f([-4; 1])$
- $f([0; 1])$
- $f([0; 2])$
- $f([1; +\infty[)$

x	-4	0	1	2	$+\infty$
		2		$\frac{5}{2}$	
$f(x)$	-3		0		

6 Monotonie d'une fonction numérique

Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et λ un nombre réel.

- f et $f + \lambda$ ont le même sens de variations sur I .
- Si $\lambda > 0$, alors f et λf ont le même sens de variations sur I .
- Si $\lambda < 0$, alors f et λf ont des sens de variations contraires sur I .

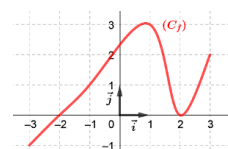
Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$.

- 1 Étudier la parité de f .
- 2 Étudier la monotonie de f sur $[0; +\infty[$, puis sur $]-\infty; 0]$.
- 3 En déduire la monotonie des fonctions $3f$, $-2f$ et $f + 3$ sur $[0; +\infty[$.

Application

Soit f une fonction définie sur $[-3; 3]$ par sa courbe ci-contre. Donner le tableau de variations des fonctions f , $f + 2$ et $-3f$.



7 Composée de deux fonctions numériques

Définition

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie sur un intervalle J tels que $\forall x \in I, f(x) \in J$. La **fonction composée** de f par g , notée $g \circ f$, est définie sur I par :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Remarques.

- $x \in D_{g \circ f} \iff x \in D_f \text{ et } f(x) \in D_g$.
- En général, $g \circ f \neq f \circ g$.

Propriété

Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur les intervalles I et J tels que $f(I) \subset J$.

- Si f et g ont le même sens de variations, alors $g \circ f$ est croissante sur I .
- Si f et g ont des sens de variations contraires, alors $g \circ f$ est décroissante sur I .

Exemple

On considère les fonctions :

- $f(x) = x^2$ et $g(x) = \frac{2x}{x-4}$;
- $h(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

- 1 Déterminer $D_{g \circ f}$ et l'expression de $g \circ f$.
- 2 On pose $u(x) = x^2$ et $v(x) = \frac{1-x}{1+x}$. Vérifier que $h = v \circ u$.
- 3 Étudier la monotonie de u sur $]-\infty; 0]$ et sur $[0; +\infty[$, puis celle de v sur $[0; +\infty[$.
- 4 En déduire la monotonie de h sur $]-\infty; 0]$ et sur $[0; +\infty[$.

Application

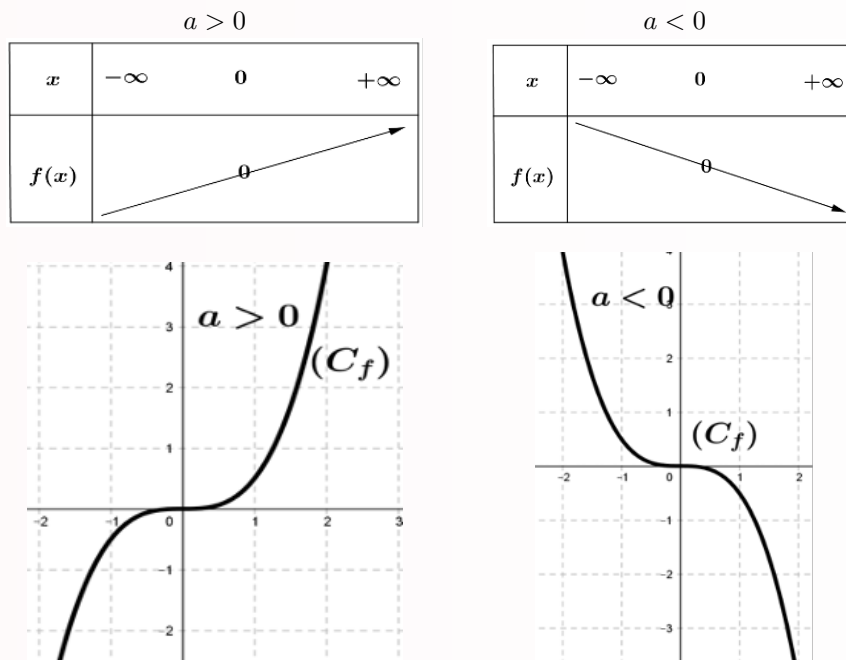
Soient f et g deux fonctions définies par $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = \frac{2x+3}{3x-6}$.

- 1 Déterminer D_f , D_g et $D_{g \circ f}$, puis l'expression de $g \circ f$.
- 2 Écrire la fonction φ définie sur $\mathbb{R}^+$ par $\varphi(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+5}$ comme composée de deux fonctions à préciser.

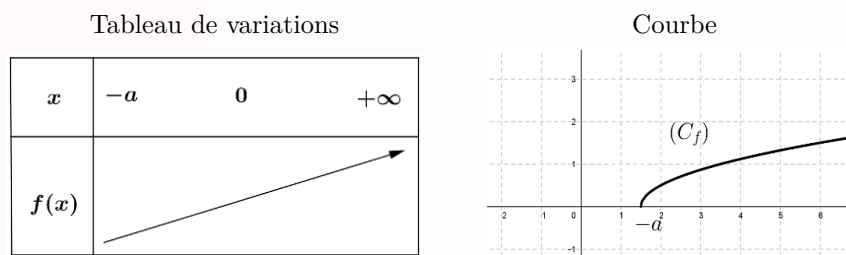
8 Représentations graphiques de $x \mapsto ax^3$ et $x \mapsto \sqrt{x+a}$

Propriété

Fonction $x \mapsto ax^3$ ($a \neq 0$).



Fonction $x \mapsto \sqrt{x+a}$.



Exemple

On considère les fonctions définies par $f(x) = \sqrt{x+5}$ et $g(x) = -2x^3$.

- 1 Étudier les variations de f et de g .
- 2 Construire (C_f) et (C_g) dans un même repère orthonormé.
- 3 Résoudre graphiquement, sur $[-5; +\infty[$, l'inéquation $\sqrt{x+5} + 2x^3 < 0$.

Application

On considère les fonctions définies par $f(x) = \frac{1}{9}x^2 + 1$ et $g(x) = \sqrt{x+1}$.

- 1 Déterminer D_g et vérifier que $f(0) = g(0)$ et $f(3) = g(3)$.
- 2 Représenter (C_f) et (C_g) dans un même repère orthonormé.
- 3 Résoudre graphiquement sur $[-1; +\infty[$ l'inéquation $\frac{1}{9}x^2 + 1 - \sqrt{x+1} \leq 0$.

Exercice à la maison

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \sqrt{\frac{1}{9}x^2 + 2}$. On reprend f et g de l'application précédente.

1 Vérifier que $(\forall x \in \mathbb{R}) : h(x) = (g \circ f)(x)$.

2 En déduire les variations de h sur $] -\infty; 0]$ et sur $[0; +\infty[$ en utilisant les variations de f et g .