

Géométrie analytique de l'espace

1^{ère} Année Baccalauréat – Sciences Mathématiques

Volume horaire officiel : 12h (cf. répartition 2013) – **Pré-requis** : vecteurs de l'espace (chapitre 5), géométrie analytique dans le plan.

Capacités attendues : traduire les notions et propriétés de la géométrie affine et vectorielle au moyen des coordonnées ; choisir la représentation adaptée (cartésienne ou paramétrique) pour étudier les positions relatives des droites et des plans et interpréter les résultats.

Table des matières

1. Repère et coordonnées dans l'espace

Définition

Définition 1.1 — Un **repère** de l'espace est la donnée d'un point O et de trois vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ non coplanaires.

Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

(x, y, z) sont les **coordonnées** de M dans le repère.

Propriété

Propriété 1.1 — Si $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A).$$

Milieu de $[AB]$: $I\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right).$

2. Représentations d'une droite

2.1 Représentation paramétrique

Théorème

Théorème 2.1 — Soit $A(x_0, y_0, z_0)$ et $\vec{u}(a, b, c) \neq \vec{0}$. La droite (D) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ admet la **représentation paramétrique** :

$$(D) : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Exemple

Exemple 2.1 — Droite passant par $A(1, 2, 3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(2, -1, 4)$:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 4t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

2.2 Droite passant par deux points

Propriété

Propriété 2.1 — La droite (AB) passant par A et B (distincts) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$. Sa représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = x_A + (x_B - x_A)t \\ y = y_A + (y_B - y_A)t \\ z = z_A + (z_B - z_A)t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

2.3 Position relative de deux droites

Théorème

Théorème 2.2 — Soient (D_1) et (D_2) deux droites de vecteurs directeurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2$.

Cas 1. $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ **colinéaires** : les droites sont *parallèles*.

- Si un point de (D_1) est sur (D_2) : confondues.
- Sinon : strictement parallèles.

Cas 2. $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ **non colinéaires** :

- Si elles ont un point commun (système compatible) : *sécantes*.
- Sinon : *non coplanaires* (« gauches »).

3. Représentations d'un plan

3.1 Représentation paramétrique

Théorème

Théorème 3.1 — Soit $A(x_0, y_0, z_0)$ et $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace. Le **plan** (P) passant par A et dirigé par $\vec{u}, \vec{v}$ admet la **représentation paramétrique** :

$$(P) : \begin{cases} x = x_0 + at + a's \\ y = y_0 + bt + b's \\ z = z_0 + ct + c's \end{cases}, \quad (t, s) \in \mathbb{R}^2,$$

où $\vec{u}(a, b, c)$ et $\vec{v}(a', b', c')$.

3.2 Plan défini par trois points non alignés

Propriété

Propriété 3.1 — Trois points A, B, C non alignés définissent un unique plan, qui passe par A et est dirigé par $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

3.3 Équation cartésienne d'un plan

Théorème

Théorème 3.2 — Tout plan (P) de l'espace admet une **équation cartésienne** de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0, \quad (a, b, c) \neq (0, 0, 0).$$

Réciproquement, l'ensemble des points $M(x, y, z)$ vérifiant cette équation est un plan.

Méthode

Pour passer d'une représentation paramétrique à une équation cartésienne, on *élimine* les paramètres t et s entre les trois équations.

Pour passer d'une équation cartésienne à une représentation paramétrique, on exprime x ou y ou z en fonction des deux autres, puis on paramètre.

Exemple

Exemple 3.1 — Équation cartésienne du plan passant par $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 0, 3)$.

Solution. L'équation $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$, soit $6x + 3y + 2z - 6 = 0$ (forme « intersections aux axes »).

3.4 Position relative droite/plan

Théorème

Théorème 3.3 — Soit (D) une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et (P) un plan dirigé par $\vec{v}_1, \vec{v}_2$.

- Si $\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{v}_2$ **coplanaires** : (D) est parallèle à (P) (incluse ou strictement).
- Sinon : (D) est sécante à (P) en un unique point.

3.5 Position relative de deux plans

Théorème

Théorème 3.4 — Deux plans dans l'espace sont soit :

- *Confondus* (mêmes équations à coefficient près).
- *Strictement parallèles* (équations cartésiennes de directions proportionnelles mais constantes différentes).
- *Sécants* le long d'une droite.

Exemple

Exemple 3.2 — Soient $(P_1) : x + 2y - z = 1$ et $(P_2) : 2x + y + z = 3$. Étudier leur position.

Solution. Les triplets $(1, 2, -1)$ et $(2, 1, 1)$ ne sont pas proportionnels, donc les plans sont sécants. Leur intersection est une droite obtenue en résolvant le système ; on peut paramétrer en choisissant z libre.

4. Synthèse

4.1 Récapitulatif

Objet	Représentation
Droite par $A, \vec{u}$	paramétrique $M = A + t\vec{u}$
Plan par $A, \vec{u}, \vec{v}$	paramétrique $M = A + t\vec{u} + s\vec{v}$
Plan	cartésienne $ax + by + cz + d = 0$
2 droites	parallèles / sécantes / non coplanaires
Droite + plan	parallèles / sécants en 1 point
2 plans	confondus / parallèles / sécants en droite

4.2 Pièges classiques

Remarque

1. **Droites gauches.** Deux droites non parallèles peuvent ne pas se couper.
2. **Paramétrique de plan : 2 paramètres.** 1 paramètre pour la droite, 2 pour le plan.
3. **Cartésienne** $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Indispensable, sinon ce n'est pas un plan.
4. **Intersection plans = système.** 2 équations, 3 inconnues : droite généralement.

Fin du chapitre 6 – Analytique de l'espace