

Exercice 1 — Calculs préliminaires : produits scalaire et vectoriel

Dans l'espace muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère $\vec{u}(2, -1, 3)$, $\vec{v}(-1, 4, 2)$, $\vec{w}(0, 2, -3)$.

1. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\vec{u} \cdot \vec{w}$, $\vec{v} \cdot \vec{w}$.
2. Calculer $\vec{u} \wedge \vec{v}$, $\vec{u} \wedge \vec{w}$, $\vec{v} \wedge \vec{w}$.
3. Vérifier que $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.
4. Calculer $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$, et l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ en degrés (à 0,1 près).
5. Calculer l'aire du triangle ABC avec $A(1, 0, 1)$, $B(2, 1, 2)$, $C(0, 3, 1)$.

Exercice 2 — Plan défini par 3 points + sphère + cercle d'intersection (BAC 2018)

On considère $A(0, -2, -2)$, $B(1, -2, -4)$, $C(-3, -1, 2)$.

1. Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$. En déduire que $2x + 2y + z + 6 = 0$ est une équation du plan (ABC) .
2. Soit $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 23 = 0$. Vérifier que (S) a pour centre $\Omega(1, 0, 1)$ et rayon $R = 5$.
3. Vérifier que $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et perpendiculaire à (ABC) .
4. Déterminer les coordonnées de $H = (\Delta) \cap (ABC)$.
5. Montrer que $d(\Omega, (ABC)) = 3$ et en déduire que (ABC) coupe (S) selon un cercle de rayon 4 et de centre H .

Exercice 3 — Sphère définie par produit scalaire (BAC 2015)

On considère $A(2, 1, 0)$ et $B(-4, 1, 0)$.

1. Soit (P) le plan passant par A , de vecteur normal $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$. Montrer que $x + y - z - 3 = 0$ est une équation de (P) .
2. Soit $(S) = \{M \in \mathcal{E} \mid \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0\}$. Montrer que (S) est la sphère de centre $\Omega(-1, 1, 0)$ et rayon 3.
3. Calculer $d(\Omega, (P))$ et en déduire que (P) coupe (S) suivant un cercle $(\mathcal{C})$. Montrer que le centre de $(\mathcal{C})$ est $H(0, 2, -1)$.
4. Montrer que $\overrightarrow{OH} \wedge \overrightarrow{OB} = \vec{i} + 4\vec{j} + 8\vec{k}$ et en déduire l'aire du triangle OHB .

Exercice 4 — Plan tangent à une sphère (BAC 2007)

Soit $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 8 = 0$ et $(P) : x - y + 2z + 1 = 0$.

1. Montrer que (S) a pour centre $\Omega(1, 2, 3)$ et rayon $\sqrt{6}$.
2. Vérifier que (P) est tangent à (S) .
3. Déterminer une représentation paramétrique de (Δ) passant par Ω et perpendiculaire à (P) .
4. Déterminer les coordonnées du point de tangence de (P) et (S) .

Exercice 5 — Droite tangente à une sphère (BAC 2009)

On considère $A(2, 2, -1)$, le plan $(P) : 2x + y + 2z - 13 = 0$ et la sphère (S) de centre $\Omega(1, 0, 1)$ et rayon 3.

1. Montrer que $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 7 = 0$ est une équation de (S) et vérifier que $A \in (S)$.
2. Calculer $d(\Omega, (P))$ et en déduire que (P) est tangent à (S) .
3. Soit (D) la droite passant par A et perpendiculaire à (P) .
 - (a) Montrer que $\vec{u}(2, 1, 2)$ est un vecteur directeur de (D) et que $\vec{\Omega A} \wedge \vec{u} = (6, -6, -3)$.
 - (b) Calculer $\frac{\|\vec{\Omega A} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$ et en déduire que (D) est tangente à (S) en A .

Exercice 6 — Plan tangent en un point (BAC 2022 Normale)

On considère $A(0, 1, 1)$, $B(1, 2, 0)$, $C(-1, 1, 2)$.

1. Montrer que $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \vec{i} + \vec{k}$, puis en déduire que $x + z - 1 = 0$ est une équation de (ABC) .
2. Soit (S) la sphère de centre $\Omega(1, 1, 2)$ et rayon $\sqrt{2}$. Déterminer son équation cartésienne.
3. Montrer que (ABC) est tangent à (S) et que A est le point de contact.
4. Soit (Δ) la droite passant par C et perpendiculaire à (ABC) .
 - (a) Donner une représentation paramétrique de (Δ) .
 - (b) Montrer que (Δ) est tangente à (S) en un point D dont on déterminera les coordonnées.

Exercice 7 — Discussion paramétrique (BAC 2022 Rattrapage)

On considère $A(1, -1, 1)$, $B(5, 1, -3)$, la sphère (S) de centre $\Omega(3, 0, -1)$ et rayon 3, et la droite (Δ) passant par A de vecteur directeur $\vec{u}(2, -2, 1)$.

1. Calculer ΩA et montrer que (Δ) et (ΩA) sont perpendiculaires.
2. En déduire la position relative de (Δ) et (S) .
3. Soit $M_a(2a - 3, 3 - 2a, a - 1)$, $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $\vec{AM_a} = (a - 2)\vec{u}$ et que $M_a \in (\Delta)$.
4. Soit (P_a) le plan passant par M_a et perpendiculaire à (Δ) .
 - (a) Vérifier que $2x - 2y + z - 9a + 13 = 0$ est une équation de (P_a) .
 - (b) Montrer que $d(\Omega, (P_a)) = |3a - 6|$.
 - (c) Déterminer les valeurs de a pour lesquelles (P_a) est tangent à (S) .

Exercice 8 — Plan tangent + aire de triangle (BAC 2017)

On considère le plan (P) passant par $A(0, 1, 1)$ de vecteur normal $\vec{u}(2, 0, 2)$ et la sphère (S) de centre $\Omega(0, 1, -1)$ et rayon $\sqrt{2}$.

1. Montrer que $x + z - 1 = 0$ est une équation de (P) .
2. Montrer que (P) est tangent à (S) et vérifier que $B(1, 1, 0)$ est le point de contact.
3. Soit (Δ) la droite passant par A et orthogonale à (P) .
 - (a) Donner une représentation paramétrique de (Δ) .
 - (b) Montrer que (Δ) est tangente à (S) au point $C(1, 1, 0)$.
4. Calculer $\vec{OC} \wedge \vec{OB}$ et en déduire l'aire du triangle OCB .

Exercice 9 — Droite sécante avec sphère (BAC 2017 Rattrapage)

On considère $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 1 = 0$ et $(P) : y - z = 0$.

1. Montrer que (S) a pour centre $\Omega(1, 1, 1)$ et rayon 2.
2. Calculer $d(\Omega, (P))$ et en déduire que (P) coupe (S) suivant un cercle $(\mathcal{C})$. Déterminer son centre

et son rayon.

3. Soit (Δ) la droite passant par $A(1, -2, 2)$ et orthogonale à (P) .
 - (a) Montrer que $\vec{u}(0, 1, -1)$ est un vecteur directeur de (Δ) .
 - (b) Montrer que $\|\vec{\Omega A} \wedge \vec{u}\| = \sqrt{2} \|\vec{u}\|$ et en déduire que (Δ) coupe (S) en deux points.
 - (c) Déterminer les coordonnées de ces deux points.

Exercice 10 — Synthèse : intersection de deux plans + sphère

Soient $(P) : 2x + y - z + 1 = 0$ et $(Q) : x - y + 2z - 4 = 0$, et $A(1, 2, 3)$.

1. Donner les vecteurs normaux $\vec{n}_P$ et $\vec{n}_Q$. Vérifier que $\vec{n}_P$ et $\vec{n}_Q$ ne sont pas colinéaires.
2. Calculer $\vec{n}_P \wedge \vec{n}_Q$ et en déduire un vecteur directeur de la droite $(D) = (P) \cap (Q)$.
3. Donner une représentation paramétrique de (D) .
4. Calculer la distance de A à (P) et à (Q) .
5. Déterminer une équation de la sphère (S) de centre A tangente au plan (P) .
6. La droite (D) coupe-t-elle la sphère (S) ? Si oui, déterminer les points d'intersection.