

Table des matières

1	Produit scalaire dans l'espace	2
1.1	Expression analytique	2
1.2	Orthogonalité de deux droites	2
2	Équation cartésienne d'un plan	3
2.1	Distance d'un point à un plan	3
2.2	Orthogonalité et parallélisme de plans	4
3	Étude analytique d'une sphère	4
	Forme générale	4
4	Position relative sphère / plan / droite	5
4.1	Tableau récapitulatif	5
5	Produit vectoriel	6
5.1	Expression analytique	7
5.2	Applications du produit vectoriel	7

Remarque

Dans tout ce chapitre, l'espace est rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1 Produit scalaire dans l'espace

Définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace, et A, B, C trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Le *produit scalaire* $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dans tout plan contenant A, B, C .

Conséquences

- Si $\vec{u}, \vec{v}$ sont non nuls : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})})$.
- $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$, noté $\vec{u}^2$.

1.1 Expression analytique

Propriété

Si $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$, alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz', \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Pour $A(x_A, y_A, z_A), B(x_B, y_B, z_B)$: $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

Exemple

« Nature d'un triangle. »

Soient $A(2, -1, 1), B(5, 3, 1), C(6, -4, 1)$. Calculer AB, AC et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, puis donner la nature du triangle ABC .

Solution. $\overrightarrow{AB}(3, 4, 0), \overrightarrow{AC}(4, -3, 0)$. $AB = \sqrt{9 + 16} = 5, AC = \sqrt{16 + 9} = 5, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 12 - 12 + 0 = 0$.
Triangle **rectangle isocèle** en A .

1.2 Orthogonalité de deux droites

Propriété

$(D_1) \perp (D_2) \iff \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$ où $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ sont des vecteurs directeurs de $(D_1), (D_2)$.

Application

Vérifier que $(D_1) \perp (D_2)$: (D_1) dirigée par $\vec{u}(1, 2, 3)$; $(D_2) : \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 - 2t \\ z = 5 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

À faire à la maison

Soient $A(1, 0, 2)$, $B(3, 2, 0)$, $C(2, 4, 3)$, $D(0, 2, 5)$.

- 1 Déterminer les coordonnées de $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$.
- 2 Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$, $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$, $\vec{AC} \cdot \vec{AD}$.
- 3 Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{CD}$ et en déduire que $(AB) \perp (CD)$.
- 4 Calculer la mesure (en degrés) de l'angle $(\widehat{\vec{AB}, \vec{AC}})$.

2 Équation cartésienne d'un plan

Propriété

Soit $\vec{n}(a, b, c)$ un vecteur non nul et $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de l'espace. Il existe un unique plan (P) passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$:

$$M(x, y, z) \in (P) \iff \vec{AM} \cdot \vec{n} = 0 \iff ax + by + cz + d = 0$$

avec $d = -(ax_A + by_A + cz_A)$.

Exemple

« Équation d'un plan. »

Déterminer une équation cartésienne du plan (P) passant par $A(1, -2, 3)$ de vecteur normal $\vec{n}(1, -3, -2)$.

Solution. Le plan a pour équation $1 \cdot x - 3 \cdot y - 2 \cdot z + d = 0$. Or $A \in (P) : 1 - 3(-2) - 2(3) + d = 0$, soit $1 + 6 - 6 + d = 0$, donc $d = -1$. Conclusion : $(P) : x - 3y - 2z - 1 = 0$.

2.1 Distance d'un point à un plan

Propriété

Si $(P) : ax + by + cz + d = 0$ et $A(x_A, y_A, z_A)$:

$$d(A, (P)) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

2.2 Orthogonalité et parallélisme de plans

Propriété

Soient (P) , (Q) deux plans de vecteurs normaux $\vec{n}_P$, $\vec{n}_Q$.

- $(P) \perp (Q) \iff \vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q = 0$.
- $(P) \parallel (Q) \iff \vec{n}_P, \vec{n}_Q$ colinéaires.

Application

- 1 Soit $(P) : x + y + z + 1 = 0$ et $A(1, 2, 0)$. Calculer $d(A, (P))$, déterminer la droite (D) passant par A orthogonale à (P) , et trouver le projeté orthogonal H de A sur (P) .
- 2 Étudier l'orthogonalité de $(P) : 2x + z - 1 = 0$ et $(Q) : x - 2y - 2z + 1 = 0$.

À faire à la maison

On considère les points $A(-1, 0, 1)$, $B(1, 2, -1)$, $C(1, -1, 2)$ et le plan $(P) : x + y - z = 0$.

- 1 Donner une représentation paramétrique de (AB) .
- 2 Vérifier que $(AB) \perp (P)$ et déterminer le point d'intersection.
- 3 Montrer que $(AC) \parallel (P)$.
- 4 Déterminer une équation cartésienne du plan (Q) passant par B et parallèle à (P) .
- 5 Calculer la distance entre (P) et (Q) .

3 Étude analytique d'une sphère

Définition

La sphère (S) de centre $\Omega(a, b, c)$ et de rayon $R > 0$ est l'ensemble des points M tels que $\Omega M = R$. Son équation cartésienne :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2.$$

Propriété

Soient A, B deux points distincts. La sphère de **diamètre** $[AB]$ est l'ensemble des M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$.

Propriété

Forme générale

Soit $(S) : x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$. Posons $\Delta = a^2 + b^2 + c^2 - 4d$.

- Si $\Delta > 0$: (S) est la sphère de centre $\Omega\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right)$ et de rayon $R = \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$.
- Si $\Delta = 0$: $(S) = \{\Omega\}$.
- Si $\Delta < 0$: $(S) = \emptyset$.

Exemple

« Identification d'une sphère. »

Étudier $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 3z + 2 = 0$.

Solution. Ici $a = 0$, $b = -2$, $c = 3$, $d = 2$. $\Delta = 0 + 4 + 9 - 8 = 5 > 0$. Donc (S) est la sphère de centre $\Omega\left(0; 1; -\frac{3}{2}\right)$ et rayon $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Application

- 1 Donner une équation cartésienne de la sphère de centre $\Omega(2, 0, 1)$ de rayon $\sqrt{2}$.
- 2 Donner une équation cartésienne de la sphère de centre $\Omega(1, -1, 2)$ passant par $A(-1, 4, 5)$.
- 3 Identifier $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y = 0$.
- 4 Donner deux méthodes pour l'équation de la sphère de diamètre $[AB]$ avec $A(-1, 3, 2)$, $B(-3, 1, 0)$.

À faire à la maison

On considère $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 4z + 5 = 0$.

- 1 Vérifier que (S) est une sphère ; déterminer son centre Ω et son rayon R .
- 2 Le point $A(2, 1, 3)$ appartient-il à (S) ?
- 3 Soient $B(1, 1, 1)$ et $C(5, 1, 3)$. Montrer que $[BC]$ est un diamètre de (S) .
- 4 Donner une représentation paramétrique de (S) .
- 5 Donner les équations des deux plans tangents à (S) et parallèles à $z = 0$.

4 Position relative sphère / plan / droite

4.1 Tableau récapitulatif

Sphère (S) de centre Ω , rayon R ; plan (P) , droite (D)		
Sphère / plan	$d = d(\Omega, (P))$	Intersection
	$d > R$	vide
	$d = R$	un point (tangence)
	$d < R$	cercle de centre H , rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2}$
Sphère / droite	$d = d(\Omega, (D))$	Intersection
	$d > R$	vide
	$d = R$	un point (tangence)
	$d < R$	deux points

Exemple

« Position sphère / plan. »

Soit $(S) : x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 2z - 1 = 0$ et $(P_1) : 2x + y + 2z - 3 = 0$. Étudier la position relative.

Solution. Centre $\Omega(-1, 1, -1)$, rayon $R = \sqrt{1 + 1 + 1 + 1} = 2$. $d(\Omega, (P_1)) = \frac{|2(-1) + 1 + 2(-1) - 3|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{6}{3} = 2 = R$. Donc (P_1) est **tangent** à (S) .

Application

Soit $(S) : x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 2z - 1 = 0$. Étudier la position relative de (S) et de chaque plan :

- $(P_2) : x - 2y + 2z + 3 = 0$
- $(P_3) : x + 2y - z + 9 = 0$
- $(P_4) : x - y + z = 0$

À faire à la maison

Soit $(P) : 2x - 2y - 5 = 0$ et $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 6z + 11 = 0$.

- 1 Montrer que (S) est une sphère et déterminer Ω , R .
- 2 Montrer que (P) coupe (S) suivant un cercle (C) ; déterminer son centre H et son rayon r .
- 3 Donner les deux équations cartésiennes des plans tangents à (S) et parallèles à (P) .
- 4 Soit $(Q) : x + y + z + 1 = 0$. Vérifier que (Q) est tangent à (S) et déterminer le point de contact.
- 5 Vérifier que $A(2, -1, -2) \in (S)$ et déterminer une équation du plan tangent à (S) en A .

5 Produit vectoriel

Définition

Le *produit vectoriel* de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ (ou $\vec{u} \times \vec{v}$), est le vecteur $\vec{w}$ tel que :

- Si $\vec{u}, \vec{v}$ colinéaires : $\vec{w} = \vec{0}$.
- Sinon : $\vec{w}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base directe, et $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot |\sin(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})})|$.

Conséquences

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\iff \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

Propriété

Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs et $\alpha \in \mathbb{R}$.

- $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$
- $\vec{u} \wedge \vec{0} = \vec{0}$
- $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$
- $(\alpha \vec{u}) \wedge \vec{v} = \alpha (\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{u} \wedge (\alpha \vec{v})$

5.1 Expression analytique

Propriété

Si $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}.$$

Moyen mnémotechnique :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \vec{k}.$$

Exemple

« Calcul d'un produit vectoriel. »

Calculer $\vec{u} \wedge \vec{v}$ pour $\vec{u}(0, 1, -2)$ et $\vec{v}(-3, 1, 2)$.

Solution.

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \times 2 - (-2) \times 1 \\ (-2) \times (-3) - 0 \times 2 \\ 0 \times 1 - 1 \times (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

5.2 Applications du produit vectoriel

Propriété

- **Plan défini par 3 points A, B, C non alignés** : $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est normal au plan (ABC) .
- **Aire d'un triangle** : $\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$.
- **Aire d'un parallélogramme $ABCD$** : $\mathcal{A} = \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\|$.
- **Distance d'un point M à une droite $(D) = (A, \vec{u})$** : $d(M, (D)) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$.
- **Intersection de deux plans $(P), (Q)$ de normales $\vec{n}_P, \vec{n}_Q$** : si $\vec{n}_P \wedge \vec{n}_Q \neq \vec{0}$, $(P) \cap (Q)$ est une droite dirigée par $\vec{n}_P \wedge \vec{n}_Q$.

Exemple

« Plan défini par 3 points. »

Soient $A(2, 4, -5)$, $B(1, 0, 4)$, $C(0, 3, 1)$. Donner une équation cartésienne du plan (ABC) .

Solution. $\overrightarrow{AB}(-1, -4, 9)$, $\overrightarrow{AC}(-2, -1, 6)$.

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} (-4)(6) - (9)(-1) \\ (9)(-2) - (-1)(6) \\ (-1)(-1) - (-4)(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ -12 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Plan (ABC) : $-15(x-2) - 12(y-4) - 7(z+5) = 0$, soit $-15x - 12y - 7z + 43 = 0$, ou encore $15x + 12y + 7z - 43 = 0$.

Application

- 1 Soient $A(-1, 2, 0)$, $B(3, 0, 4)$, $C(-2, 1, 2)$. Vérifier que A, B, C ne sont pas alignés et calculer l'aire du triangle ABC .
- 2 Calculer la distance de $M(3, 2, 1)$ à $(D) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 \\ z = -t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.
- 3 Soient $(P) : 2x + z - 1 = 0$, $(Q) : x - 2y - 2z + 1 = 0$. Vérifier que $(P) \cap (Q)$ est une droite, donner un vecteur directeur et une représentation paramétrique.

À faire à la maison

On considère les points $A(0, -2, -2)$, $B(1, -2, -4)$, $C(-3, -1, 2)$, et la sphère $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 23 = 0$.

- 1 Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.
- 2 En déduire que $2x + 2y + z + 6 = 0$ est une équation cartésienne de (ABC) .
- 3 Montrer que le centre de (S) est $\Omega(1, 0, 1)$ et $R = 5$.
- 4 Vérifier que $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω orthogonale à (ABC) .
- 5 Déterminer le point H d'intersection de (Δ) et (ABC) .
- 6 Vérifier $d(\Omega, (ABC)) = 3$, puis montrer que $(ABC) \cap (S)$ est un cercle de rayon 4 centré en H .
- 7 Calculer l'aire du triangle ABC et celle du parallélogramme $ABCD$ où D est tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.