

Table des matières

1	Calcul vectoriel et colinéarité	2
2	Vecteurs coplanaires et bases	2
3	Déterminant et coplanarité	3
4	Droites et plans dans l'espace	4
5	Positions relatives	4

1 Calcul vectoriel et colinéarité

Définition

Soient A, B deux points de l'espace.

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le bipoint (A, B) ; si $A \neq B$, il est caractérisé par sa direction (droite (AB)), son sens et sa norme $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$. Si $A = B$, $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.
- L'ensemble des vecteurs de l'espace est noté $\mathcal{V}_3$.
- Somme** : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (relation de Chasles).
- Produit par un réel α** : $\alpha\vec{0} = \vec{0}$; pour $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\alpha \neq 0$, $\alpha\vec{u}$ a même direction que $\vec{u}$, même sens si $\alpha > 0$ (resp. opposé si $\alpha < 0$), et $\|\alpha\vec{u}\| = |\alpha| \|\vec{u}\|$.
- Colinéarité** : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = \alpha\vec{v}$ ou $\vec{v} = \alpha\vec{u}$.
- Alignement** : A, B, C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Propriété

Pour $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}_3$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$: $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$; $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$; $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$.

Exemple

On considère le parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$.

- Montrer que $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BH}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AF}$.
- Soit $OABC$ un tétraèdre, et I, E, F tels que $2\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA}$, $3\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AC}$. Montrer que $\overrightarrow{IF} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ et en déduire que I, E, F sont alignés.

Application

On considère le cube $ABCDEFGH$. Soient I, J les milieux respectifs de $[BG]$ et $[HG]$, et K tel que $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$. Montrer que les droites (AJ) et (IK) sont parallèles.

2 Vecteurs coplanaires et bases

Définition

- Trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ non nuls sont **coplanaires** si les points A, B, C, D tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$ appartiennent à un même plan.
- Si $\vec{u}, \vec{v}$ ne sont pas colinéaires, alors $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires si et seulement s'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.
- Trois vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ non coplanaires constituent une **base** de $\mathcal{V}_3$. Pour tout $\vec{u} \in \mathcal{V}_3$, il existe $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ unique tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$; on note $\vec{u}(x; y; z)$.
- Quatre points A, B, C, D non coplanaires définissent un **repère cartésien** $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$. Tout point M admet des coordonnées uniques (x_M, y_M, z_M) .

Propriété

Soient $\vec{u}(x; y; z)$, $\vec{v}(x'; y'; z')$ deux vecteurs et $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$ deux points dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- Coordonnées de $\vec{u} + \vec{v} : (x + x'; y + y'; z + z')$; de $\alpha\vec{u} : (\alpha x; \alpha y; \alpha z)$.
- Coordonnées de $\overrightarrow{AB} : (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.
- Coordonnées du milieu I de $[AB] : \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$.

Exemple

On considère le tétraèdre $ABCD$. Soient I le milieu de $[BD]$ et J le centre de gravité de ACD .

- 1 Déterminer dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ les coordonnées des points C , I et J .
- 2 Soit E, F tels que $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$. Montrer que les points I, J, C, F sont coplanaires.

Application

On considère le parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$.

- 1 Vérifier que $(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EH})$ forme une base de $\mathcal{V}_3$.
- 2 Déterminer dans cette base les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, $-3\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{EC}$.

3 Déterminant et coplanarité

Définition

Soient $\vec{u}(x_1; y_1; z_1)$, $\vec{v}(x_2; y_2; z_2)$, $\vec{w}(x_3; y_3; z_3)$ trois vecteurs dans une base de $\mathcal{V}_3$. Le **déterminant** est :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = x_1 \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Critère : $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$.

Exemple

Soient $\vec{u}_1(-1; -2; 0)$, $\vec{u}_2(3; 5; -1)$, $\vec{u}_3(-5; -5; 5)$ et $\vec{u}_4(0; -1; 2)$.

- 1 Calculer $\det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ et $\det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_4)$.
- 2 En déduire si chacun des triplets est coplanaire ou non.

Application

Soit $ABCD$ un tétraèdre et $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$.

- 1 Calculer les coordonnées de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.
- 2 Les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont-ils coplanaires ?

4 Droites et plans dans l'espace

Définition

Soit $A(x_A; y_A; z_A)$, $\vec{u}(\alpha; \beta; \gamma)$ et $\vec{v}(\alpha'; \beta'; \gamma')$ avec $\vec{u}, \vec{v}$ non colinéaires.

- **Droite** $D(A, \vec{u})$ **représentation paramétrique** :
$$\begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \\ z = z_A + \gamma t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$
- **Droite** $D(A, \vec{u})$ **équations cartésiennes** : si $\alpha\beta\gamma \neq 0$, $\frac{x - x_A}{\alpha} = \frac{y - y_A}{\beta} = \frac{z - z_A}{\gamma}$. Cas dégénérés : on adapte selon les composantes nulles.
- **Plan** $P(A, \vec{u}, \vec{v})$ **équation cartésienne** : $M \in (P) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$, ce qui s'écrit $ax + by + cz + d = 0$.
- **Plan** $P(A, \vec{u}, \vec{v})$ **représentation paramétrique** :
$$\begin{cases} x = x_A + \alpha t_1 + \alpha' t_2 \\ y = y_A + \beta t_1 + \beta' t_2 \\ z = z_A + \gamma t_1 + \gamma' t_2 \end{cases} \quad (t_1, t_2 \in \mathbb{R}).$$

Exemple

- 1 Déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par $A(2; 0; 1)$ et $B(2; 3; 2)$.
- 2 Déterminer un système d'équations cartésiennes de la droite passant par $A(1; 5; -2)$ de vecteur directeur $\vec{u}(-2; 3; 1)$.
- 3 Déterminer une équation cartésienne du plan (P) passant par $A(1; 2; 3)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}(\sqrt{2}; 0; -1)$ et $\vec{v}(0; 1; \sqrt{2})$.
- 4 Déterminer une représentation paramétrique du plan (Q) : $2x - y + 4z - 1 = 0$.

Application

- 1 Déterminer un système d'équations cartésiennes de la droite passant par $A(3; -2; 0)$ de vecteur directeur $\vec{u}(2; 0; -1)$.
- 2 Déterminer une représentation paramétrique du plan passant par $A(5; 5; 5)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}(0; 0; -1)$ et $\vec{v}(\sqrt{5}; 1; \sqrt{5})$.

5 Positions relatives

Propriété

- **Deux droites** $D(A, \vec{u})$ et $\Delta(B, \vec{v})$: parallèles ssi $\vec{u}, \vec{v}$ colinéaires ; coplanaires ssi $\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}$ coplanaires.
- **Deux plans** $P(A, \vec{u}, \vec{v})$ et $Q(B, \vec{u}', \vec{v}')$: parallèles ssi $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}') = 0$ et $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{v}') = 0$.
- **Une droite et un plan** $D(A, \vec{u})$, $P(B, \vec{v}, \vec{w})$: la droite est parallèle au plan ssi $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$.

Exemple

- 1 Soient $M(1; -3; 2)$, $N(0; -1; 1)$ et $(\Delta) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = -1 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$. Étudier la position relative de (MN) et (Δ) .
- 2 Étudier la position relative des plans $(P) : -2x + 2y - 4z - 1 = 0$ et $(Q) : x - y + 2z = 0$.
- 3 Étudier la position relative du plan $(P) : 3x - 2y + z + 5 = 0$ et de la droite $(D) : \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 + t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$.

Application

On considère les deux plans $(P) : x - y + 2z + 1 = 0$ et $(Q) : x - 4y + 3z = 0$.

- 1 Prouver que (P) et (Q) sont sécants.
- 2 Déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection.