

Série d'exercices — Chapitre 8 : Calcul intégral

2^e BAC SX BIOF

En. Nidal SABI

Exercice 1 — Calcul direct par primitive

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_{-1}^2 (2x^3 - 5x^2 + 2) dx$

2. $\int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} \right) dx$

3. $\int_0^2 \sqrt{x+4} dx$

4. $\int_1^e \frac{1}{x} dx$

5. $\int_0^\pi \cos(2x) dx$

6. $\int_0^1 e^x \sqrt{e^x + 1} dx$

Exercice 2 — Reconnaissance de formes u'/u , $u' \cdot u^r$, $u'e^u$

Calculer les intégrales :

1. $\int_0^4 x\sqrt{1+x^2} dx$

2. $\int_{e^2}^{e^4} \frac{\ln x}{x} dx$

3. $\int_0^{\pi/4} \frac{e^x}{e^x + 1} dx$

4. $\int_1^2 \frac{x-1}{x^2-2x+2} dx$

5. $\int_0^1 (1-x) e^{x^2-2x+3} dx$

6. $\int_0^{\pi/6} \cos x \cdot \sin^5 x dx$

Exercice 3 — Décomposition de fractions rationnelles

1. Soit $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 4}{x - 1}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

(a) Déterminer les réels a, b, c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$.

(b) En déduire $\int_2^3 f(x) dx$.

2. Calculer $\int_0^1 \frac{x+2}{x^2+4x+5} dx$.

Exercice 4 — Intégrale d'une valeur absolue + Chasles

Calculer :

1. $\int_{-3}^2 |x| dx$

2. $\int_{-1}^1 \frac{2|x|}{x^2+1} dx$

3. $\int_{-1}^5 |x^2 - 4x| dx$

4. $\int_0^1 |e^{-x+1} - 1| dx$

Exercice 5 — Linéarisation

1. Linéariser $\cos^3 x$ et $\sin^4 x$.

2. En déduire $\int_0^\pi \cos^3 x dx$ et $\int_0^{\pi/2} \sin^4 x dx$.

3. Vérifier que $\sin^2 x \cos^3 x = \cos x \sin^2 x - \cos x \sin^4 x$, puis calculer $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos^3 x dx$.

Exercice 6 — Intégration par parties (IPP)

Calculer par IPP :

1. $I_1 = \int_0^1 x e^x dx$

4. $I_4 = \int_2^e \ln(x+2) dx$

2. $I_2 = \int_1^e x^2 \ln x dx$

5. $I_5 = \int_1^{e^2} x(\ln x)^2 dx$

3. $I_3 = \int_0^\pi x^2 \cos x dx$

6. $I_6 = \int_{\pi/2}^\pi \sin x e^x dx$

Exercice 7 — Système d'intégrales

Soient $K = \int_0^{\ln 2} \frac{e^t - 1}{e^t + 1} dt$ et $L = \int_0^{\ln 2} \frac{1}{e^t + 1} dt$.

1. Calculer $K + L$ et $K + 2L$.

2. En déduire les valeurs de K et L .

3. Soient $I = \int_0^{\pi/4} \cos(3x) \cos x dx$ et $J = \int_0^{\pi/4} \sin(3x) \sin x dx$.

(a) Vérifier que $\cos(3x) \cos x + \sin(3x) \sin x = \cos(2x)$ et que $\cos(3x) \cos x - \sin(3x) \sin x = \cos(4x)$.

(b) Calculer $I + J$ et $I - J$, puis en déduire I et J .

Exercice 8 — Inégalité, encadrement et valeur moyenne

1. Montrer que $\int_1^2 \ln(x^2 + 1) dx \geq 0$.

2. Encadrer $\int_1^2 \frac{\sin x}{x^2} dx$ par deux nombres simples.

3. Calculer la valeur moyenne de $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ sur $[1; 3]$.

4. Calculer la valeur moyenne de $g(x) = \frac{\ln^2 x + x}{x}$ sur $[1; e]$.

Exercice 9 — Calcul d'aires

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1 cm.

1. Calculer en cm^2 l'aire du domaine délimité par la courbe de $f(x) = \sin x$, l'axe (Ox) et les droites $x = -\frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{\pi}{2}$.

2. Soient $f(x) = 2x^2 + 1$ et $g(x) = x^2 + x + 1$. Calculer en cm^2 l'aire du domaine (Δ) délimité par $(\mathcal{C}_f)$, $(\mathcal{C}_g)$, $x = 0$ et $x = 2$.

3. Soit f définie sur $]0; e[\cup]e; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x(1 - \ln x)}$.

(a) Montrer que $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1 - \ln x)} dx = \ln 2$.

(b) Calculer en cm^2 l'aire du domaine délimité par $(\mathcal{C}_f)$, l'axe (Ox) et les droites $x = 1$ et $x = \sqrt{e}$.

Exercice 10 — Calcul de volumes de révolution

1. Calculer le volume du solide engendré par la rotation de la courbe $f(x) = e^x$ sur $[0; 1]$ autour de l'axe (Ox) .

2. Calculer le volume engendré par la rotation de $f(x) = xe^{x/2}$ sur $[0; 1]$ autour de (Ox) (indication : développer $x^2 e^x$ et utiliser une IPP double).

3. Calculer le volume engendré par la rotation de $g(x) = \cos x$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ autour de (Ox) (*indication : linéariser $\cos^2 x$*).