

Table des matières

1	Intégrale d'une fonction continue sur un segment	2
1.1	Propriétés de l'intégrale	2
2	Intégrale, ordre et valeur moyenne	3
	Positivité et croissance	3
3	Techniques de calcul d'intégrales	4
3.1	Reconnaissance d'une primitive	4
3.2	Décomposition d'une fraction rationnelle	5
3.3	Linéarisation des polynômes trigonométriques	5
4	Intégration par parties (IPP)	5
5	Calcul d'aires	6
6	Calcul de volumes	7
7	Tableau récapitulatif des primitives usuelles	8

1 Intégrale d'une fonction continue sur un segment

Activité

Soit $f(x) = 3x^2 - 1$. Déterminer deux primitives F et G de f sur $\mathbb{R}$, puis calculer $F(2) - F(0)$ et $G(2) - G(0)$. Que remarquez-vous ?

Définition

Soit f continue sur un segment $[a; b]$ et F une primitive de f sur $[a; b]$. Le nombre $F(b) - F(a)$ est appelé *intégrale* de f de a à b , et noté :

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Cette définition ne dépend pas de la primitive choisie.

Exemple

« Calcul d'une intégrale élémentaire. »

Calculer $\int_0^1 (x + 1) dx$.

Solution. Une primitive de $f(x) = x + 1$ est $F(x) = \frac{x^2}{2} + x$. Donc :

$$\int_0^1 (x + 1) dx = F(1) - F(0) = \frac{1}{2} + 1 - 0 = \frac{3}{2}.$$

1.1 Propriétés de l'intégrale

Propriété

Soit f continue sur I et $a, b, c \in I$.

- $\int_a^a f(x) dx = 0$.
- $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$.
- **(Chasles)** $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.

Propriété

Soient f, g continues sur $[a; b]$ et $k \in \mathbb{R}$.

- $\int_a^b (f + g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$.
- $\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$.

Exemple

« Intégrale d'une valeur absolue (Chasles). »

Calculer $\int_{-3}^2 |x| dx$.

Solution. Sur $[-3; 0]$, $|x| = -x$; sur $[0; 2]$, $|x| = x$. Par Chasles :

$$\int_{-3}^2 |x| dx = \int_{-3}^0 (-x) dx + \int_0^2 x dx = \left[-\frac{x^2}{2} \right]_{-3}^0 + \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 = \frac{9}{2} + 2 = \frac{13}{2}.$$

Application

Calculer :

1 $\int_{-1}^2 (2x^3 - 5x^2 + 2) dx$

3 $\int_0^{\pi} \cos(2x) dx$

5 $\int_{-1}^5 |x^2 - 4x| dx$

2 $\int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} \right) dx$

4 $\int_{-1}^1 \frac{2|x|}{x^2 + 1} dx$

6 $\int_0^1 |e^{-x+1} - 1| dx$

À faire à la maison

Calculer les intégrales suivantes :

1 $\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1} \right) dx$

3 $\int_{e^2}^{e^4} \frac{\ln x}{x} dx$

2 $\int_1^e \frac{1}{x} dx$

4 $\int_0^4 x \sqrt{1+x^2} dx$

2 Intégrale, ordre et valeur moyenne

Propriété

Soient f, g continues sur $[a; b]$ avec $a \leq b$.

- Si $f \geq 0$ sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.
- Si $f \leq g$ sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

Définition

Soit f continue sur $[a; b]$, $a < b$. La *valeur moyenne* de f sur $[a; b]$ est :

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Il existe au moins un $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = \mu$.

Exemple

« Calcul d'une valeur moyenne. »

Calculer la valeur moyenne de $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ sur $[1; 3]$.

Solution. $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = 1 + x^2$. Une primitive est $\ln(1 + x^2)$. Donc :

$$\int_1^3 \frac{2x}{1+x^2} dx = [\ln(1+x^2)]_1^3 = \ln 10 - \ln 2 = \ln 5.$$

$$\text{Valeur moyenne : } \mu = \frac{1}{3-1} \times \ln 5 = \frac{\ln 5}{2}.$$

Application

1 Montrer que $\int_1^2 \ln(x^2 + 1) dx \geq 0$.

2 Encadrer $\int_1^2 \frac{\sin x}{x^2} dx$.

3 Calculer la valeur moyenne de $x \mapsto \frac{\ln^2 x + x}{x}$ sur $[1; e]$.

À faire à la maison

Soient $K = \int_0^{\ln 2} \frac{e^t - 1}{e^t + 1} dt$ et $L = \int_0^{\ln 2} \frac{1}{e^t + 1} dt$.

1 Calculer $K + L$ et $K + 2L$.

2 En déduire les valeurs de K et L .

3 Techniques de calcul d'intégrales

3.1 Reconnaissance d'une primitive

Exemple

« Reconnaissance de la forme $\frac{u'}{u}$. »

Calculer $\int_0^{\pi/4} \frac{e^x}{e^x + 1} dx$.

Solution. On pose $u(x) = e^x + 1 > 0$, $u'(x) = e^x$. L'intégrande est $\frac{u'(x)}{u(x)}$, primitive $\ln u$:

$$\int_0^{\pi/4} \frac{e^x}{e^x + 1} dx = [\ln(e^x + 1)]_0^{\pi/4} = \ln(e^{\pi/4} + 1) - \ln 2.$$

3.2 Décomposition d'une fraction rationnelle

Exemple

« Décomposition. »

Calculer $\int_2^3 \frac{x^2 - 6x + 4}{x - 1} dx$.

Solution. Division euclidienne : $\frac{x^2 - 6x + 4}{x - 1} = x - 5 - \frac{1}{x - 1}$. Donc :

$$\int_2^3 \frac{x^2 - 6x + 4}{x - 1} dx = \left[\frac{x^2}{2} - 5x - \ln |x - 1| \right]_2^3 = \left(\frac{9}{2} - 15 - \ln 2 \right) - (2 - 10 - 0) = -\frac{5}{2} - \ln 2.$$

3.3 Linéarisation des polynômes trigonométriques

Remarque

Pour calculer $\int \cos^n x dx$ ou $\int \sin^n x dx$, on linéarise via les formules d'Euler ou les formules trigonométriques classiques.

Application

Calculer :

1 $I = \int_2^e \frac{1}{x(\ln x + 1)} dx$

3 $K = \int_0^{\pi/3} \tan x dx$

2 $J = \int_0^1 t e^{t^2} dt$

4 $L = \int_0^{\pi} \cos^3 x dx$ (linéariser)

À faire à la maison

1 Vérifier que $\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, et calculer $\int_0^1 \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} dx$.

2 Calculer $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 4 \cos(2x) \right) dx$.

4 Intégration par parties (IPP)

Propriété

Soient u, v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a; b]$.

$$\int_a^b u'(x) v(x) dx = [u(x) v(x)]_a^b - \int_a^b u(x) v'(x) dx.$$

Remarque

Stratégie : choisir v pour que sa dérivée se simplifie (souvent $v = \ln$, $v = \text{polynôme}$), et u' pour qu'il s'intègre facilement.

Exemple

« IPP avec polynôme et exponentielle. »

Calculer $I = \int_0^1 x e^x dx$.

Solution. On pose $v(x) = x$, $u'(x) = e^x$, donc $v'(x) = 1$, $u(x) = e^x$:

$$I = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - [e^x]_0^1 = e - (e - 1) = 1.$$

Exemple

« IPP avec logarithme. »

Calculer $I = \int_1^e x^2 \ln x dx$.

Solution. On pose $v(x) = \ln x$, $u'(x) = x^2$, donc $v'(x) = \frac{1}{x}$, $u(x) = \frac{x^3}{3}$:

$$I = \left[\frac{x^3 \ln x}{3} \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{3} dx = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3 - 1}{9} = \frac{2e^3 + 1}{9}.$$

Application

Calculer par IPP :

1 $\int_1^e (2x - 1) e^{-x/2} dx$

3 $\int_0^\pi x^2 \cos x dx$

2 $\int_2^e \ln(x + 2) dx$

4 $\int_0^1 x^2 e^x dx$

À faire à la maison

Calculer par IPP :

1 $\int_1^{e^2} x(\ln x)^2 dx$

3 $\int_0^1 \frac{(x + 1)^2}{e^x} dx$

2 $\int_1^2 x \sqrt{3 - x} dx$

4 $\int_{\pi/2}^\pi \sin x e^x dx$

5 Calcul d'aires

Propriété

Soit f continue sur $[a; b]$. L'aire (en unités d'aire) du domaine délimité par (C_f) , l'axe (Ox) et les droites $x = a$, $x = b$ est :

$$\mathcal{A} = \int_a^b |f(x)| dx.$$

Propriété

Soient f, g continues sur $[a; b]$. L'aire du domaine (Δ) délimité par (C_f) , (C_g) et les droites $x = a$, $x = b$ est :

$$\mathcal{A}(\Delta) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

Remarque

Unité d'aire (u.a.) : si le repère est orthogonal avec $\|\vec{i}\| = \alpha$ et $\|\vec{j}\| = \beta$, alors 1 u.a. = $\alpha \times \beta$ unités du système choisi (cm^2 , etc.).

Exemple

« Aire entre deux courbes. »

Soient $f(x) = 2x^2 + 1$ et $g(x) = x^2 + x + 1$. Calculer l'aire du domaine entre (C_f) , (C_g) , $x = 0$ et $x = 2$.

Solution. $f(x) - g(x) = x^2 - x = x(x - 1)$. Sur $[0; 1]$, $f - g \leq 0$; sur $[1; 2]$, $f - g \geq 0$. Donc :

$$\mathcal{A} = \int_0^1 (g - f) dx + \int_1^2 (f - g) dx = \int_0^1 (x - x^2) dx + \int_1^2 (x^2 - x) dx.$$

$$\int_0^1 (x - x^2) dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}. \quad \int_1^2 (x^2 - x) dx = \frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}. \quad \text{Total : } \mathcal{A} = 1 \text{ u.a.}$$

Application

Le plan est orthonormé d'unité 1 cm. Calculer l'aire du domaine délimité par la courbe de $f(x) = \sin x$, l'axe (Ox) et les droites $x = -\frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{\pi}{2}$ (en cm^2).

À faire à la maison

Soit $f(x) = \frac{1}{x(1 - \ln x)}$ sur $]0; e[\cup]e; +\infty[$, repère orthonormé d'unité 2 cm.

1 Montrer que $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1 - \ln x)} dx = \ln 2$.

2 Calculer en cm^2 l'aire du domaine délimité par (C_f) , l'axe (Ox) , $x = 1$ et $x = \sqrt{e}$.

6 Calcul de volumes

Propriété

Soit f continue sur $[a; b]$. Le volume du solide engendré par la rotation d'un tour complet de la courbe (C_f) autour de l'axe (Ox) est :

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx \quad (\text{en unités de volume}).$$

Exemple

« Volume de révolution. »

Calculer le volume engendré par la rotation de $f(x) = e^x$ sur $[0; 1]$ autour de (Ox) .

Solution.

$$V = \pi \int_0^1 e^{2x} dx = \pi \left[\frac{e^{2x}}{2} \right]_0^1 = \frac{\pi(e^2 - 1)}{2} \text{ u.v.}$$

Application

Calculer le volume engendré par la rotation autour de (Ox) de :

1 $f(x) = x e^{x/2}$ sur $[0; 1]$.

2 $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\cos x}$ sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

À faire à la maison

Calculer le volume engendré par la rotation autour de (Ox) de la courbe de $f(x) = \sqrt{x}$ sur $[0; 4]$, et celle de $g(x) = \cos x$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

7 Tableau récapitulatif des primitives usuelles

$f(x)$	Primitive $F(x)$	Conditions
a (constante)	ax	
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$n \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	$x \neq 0$
e^{ax+b}	$\frac{1}{a} e^{ax+b}$	$a \neq 0$
$\sin x$	$-\cos x$	
$\cos x$	$\sin x$	
$\sin(ax+b)$	$-\frac{1}{a} \cos(ax+b)$	$a \neq 0$
$\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a} \sin(ax+b)$	$a \neq 0$
$1 + \tan^2 x$	$\tan x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln u(x) $	$u(x) \neq 0$
$u'(x) e^{u(x)}$	$e^{u(x)}$	
$\frac{u'(x)}{(u(x))^2}$	$-\frac{1}{u(x)}$	$u(x) \neq 0$
$u'(x) (u(x))^r$	$\frac{(u(x))^{r+1}}{r+1}$	$r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$
$u'(x) \cos(u(x))$	$\sin(u(x))$	
$u'(x) \sin(u(x))$	$-\cos(u(x))$	
$\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$2\sqrt{u(x)}$	$u(x) > 0$