

Série d'exercices — Limites d'une fonction

1^{ère} BAC SX BIOF

En. Nidal SABI

Exercice 1

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$

4. $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$

Exercice 2

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x + 1}{x - 1}$

2. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x + 1}{x - 1}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2}$

4. $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 - 4}{(x + 2)^3}$

Exercice 3

Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{si } x < 1 \\ ax + 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$. Déterminer la valeur de a pour que f admette une limite en 1.

Exercice 4

Calculer les limites en $\pm\infty$:

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + x + 5}$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 4}$

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x} + x)$

Exercice 5

Calculer les limites trigonométriques suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(7x)}{2x}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{x^2}$

5. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(3x)}{\sin(5x)}$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \tan x}{x^2}$

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x}$

Exercice 6

Soit $f(x) = \frac{x + \sin x}{x}$ pour $x \neq 0$.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

2. Montrer que pour $x > 0$, $|f(x) - 1| \leq \frac{1}{x}$.

3. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Exercice 7

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x}$

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1}$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 3x + 1})$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$

Exercice 8

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x \neq 0$.

1. Vérifier que $|f(x)| \leq |x|$ pour tout $x \neq 0$.

2. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Exercice 9

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x}$ pour $x \neq 0$.

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Exercice 10

Soit f définie par $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f .

2. Simplifier $f(x)$ pour $x \neq \pm 3$.

3. Calculer les limites de f en 3 et en -3 .

Exercice 11

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \frac{\sin x}{x^2 + 1}$.

1. Montrer que $|f(x) - x| \leq \frac{1}{x^2 + 1}$.

2. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Exercice 12

Soit f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\cos x + 2x}{x + 1}$.

1. Montrer que pour tout $x > 0$, $\frac{2x-1}{x+1} \leq f(x) \leq \frac{2x+1}{x+1}$.

2. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.