

Série d'exercices N°9

Limite d'une fonction

1^{ère} Année Baccalauréat – Sciences Mathématiques

Consignes. Identifier la forme indéterminée le cas échéant et préciser la méthode utilisée (factorisation, conjuguée, limite usuelle, gendarmes).

Couverture. 12 exercices : limites usuelles, polynômes, rationnelles, racines, trigonométriques, gendarmes.

I. Limites de polynômes et rationnelles

Exercice 1 *Polynômes*

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (4x^3 - 2x^2 + x - 7).$
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^4 + 5x^3 - 2).$
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^5 + x^3 - 1).$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x - 6).$

Exercice 2 *Fonctions rationnelles à l'infini*

Calculer :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 1}{2x^2 - 5}.$
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - x + 4}{2x^2 + 1}.$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x + 2}{x^2 + 3}.$
4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^4 + x^2}{3x^4 - x}.$

Exercice 3 *Limites en un point fini (FI 0/0)*

Calculer en factorisant :

1. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}.$
2. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 2}.$
3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}.$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 2x^2}{x^2}.$
5. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}.$

II. Limites avec racines (FI 0/0 ou $\infty - \infty$)**Exercice 4** *Quantité conjuguée*

Calculer :

1. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}.$
2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1}.$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}.$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x).$
5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}).$

Exercice 5 *Racines à l'infini*

Calculer :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}.$
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$ (attention au signe de x pour sortir de la racine !).
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x}}{x + 1}.$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x - 1).$

III. Limites trigonométriques

Exercice 6 *Limites trigo de base*

Calculer en utilisant les limites usuelles :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{x}.$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(7x)}{\sin(3x)}.$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(2x)}{x}.$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(3x)}{x^2}.$
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3}$ (développement utile : $\sin x = x + O(x^3)$, $\cos x = 1 + O(x^2)$).

Exercice 7 *Changements de variable*

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\pi - x}$ (poser $h = \pi - x$).
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{\pi/2 - x}.$

3. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - 1}{x}$.

IV. Gendarmes et comparaison

Exercice 8 *Théorème des gendarmes*

1. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.
2. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} = 0$.
3. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sin(3x)}{x + 1} = 2$.
4. Soit $f(x) = \frac{E(x)}{x}$ pour $x > 0$ (où E est la partie entière). Montrer par encadrement que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

Exercice 9 *Comparaison à l'infini*

1. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + \sin x) = +\infty$.
2. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \cos x) = +\infty$.
3. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x} = 1$.

V. Limites à gauche et à droite

Exercice 10 *Limites unilatérales*

Calculer les limites à gauche et à droite. Conclure si la limite existe.

1. $f(x) = \frac{1}{x-2}$ en $x = 2$.
2. $f(x) = \frac{|x|}{x}$ en $x = 0$.
3. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$ en $x = 1$.
4. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$ en $x = 2$ et en $x = -2$.

VI. Problèmes de synthèse

Exercice 11 *Étude complète*

Soit $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 1}$.

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$.
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.

3. Calculer $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$.
4. Montrer que $f(x) = (x - 1) + \frac{4}{x - 1}$ pour $x \neq 1$.
5. Calculer $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (x - 1)]$. Interpréter graphiquement.

Exercice 12 *Limites composées*

Soit $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$.

1. Montrer que $f(x)$ est bien défini pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x]$.
3. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x]$.
4. En déduire les asymptotes obliques de la courbe de f en $\pm\infty$.

Fin de la série – Limites